

CONCEITOS BÁSICOS

Ivan Camargo

Revisão - Abril de 2007

1) Introdução

A disciplina de Conversão de Energia faz parte da área de Sistemas Elétricos de Potência. Esta área compreende outras disciplinas como Circuitos Polifásicos, Máquinas Elétricas, Análise de Sistemas de Potência e Instalações Elétricas. O que se estuda, neste conjunto de disciplinas, é a transformação da energia e a sua transmissão até o usuário final.

Outras disciplinas relacionadas com esta com esta área de estudo são: Distribuição, Transmissão, Geração, Proteção, Subestações, Eletrônica de Potência, Eficiência Energética, etc.

A história dos Sistemas Elétricos de Potência tem início com Thomas Edison no final do século passado (1882) com seu circuito de iluminação pública da cidade de Nova York em corrente contínua.

A crescente importância da eletricidade fez com que sistemas maiores e com fontes mais distantes fossem desenvolvidos. A geração e a transmissão passaram a ser feitas em corrente alternada devido, principalmente, à necessidade de elevação e abaixamento das tensões.

Antes de se falar de máquinas elétricas, ou conversores eletromecânicos de energia, é importante recordar alguns conceitos básicos relacionados com sistemas elétricos de potência para padronizar a nomenclatura ao longo deste texto.

2) Potência

A potência instantânea é por definição o produto da corrente pela tensão.

$$p = vi \tag{1}$$

Exemplo 1

Dado o circuito da figura 2.1, considerando que a tensão e a corrente sejam puramente senoidais, determinar o valor a potência absorvida pelo circuito.

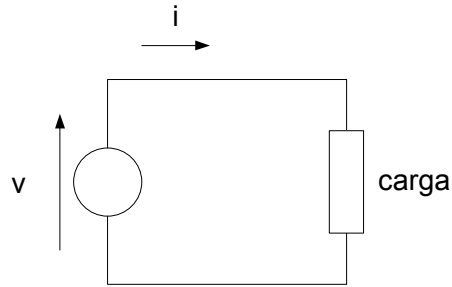


Figura 2.1: Potência em um circuito elétrico

Solução

$$v(t) = V_{máx} \cos \omega t \quad (2)$$

$$i(t) = I_{máx} \cos(\omega t - \phi) \quad (3)$$

Onde:

$V_{máx}$ é o valor máximo da tensão;
 $I_{máx}$ é o valor máximo da corrente;
 ω é a frequência angular e
 ϕ é o ângulo de defasagem entre a corrente e a tensão.

Observe que não há nenhuma perda de generalidade em considerar a tensão sem defasagem.

Lembrando que:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} \{ \cos(a + b) + \cos(a - b) \} \quad (4)$$

Então, da definição:

$$p = \frac{1}{2} V_{máx} I_{máx} \{ \cos(2\omega t - \phi) + \cos \phi \} \quad (5)$$

A potência instantânea em um circuito monofásico tem uma componente constante e uma componente pulsante no dobro da frequência da rede. A figura 2.2 mostra o valor instantâneo da potência para um ângulo de defasagem de 30° .

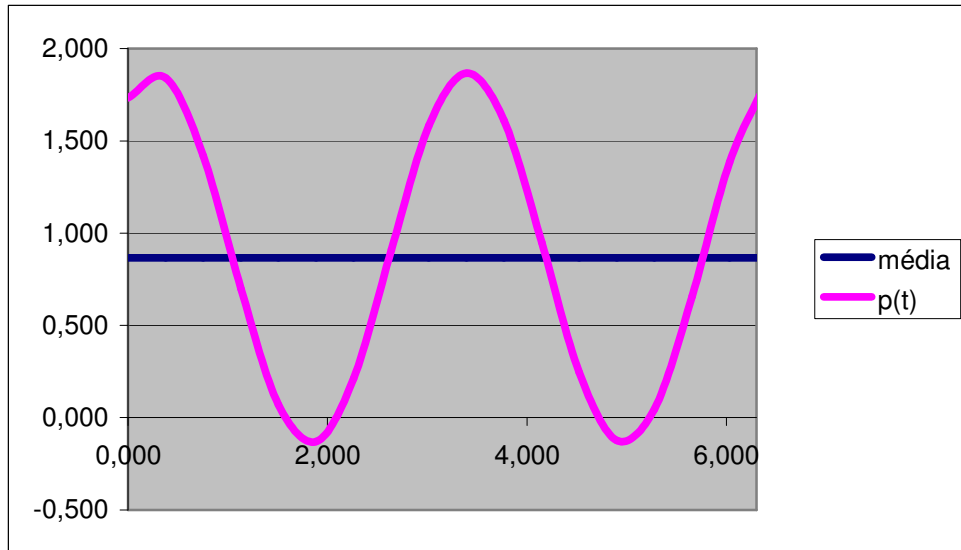


Figura 2.2: $p(t)$ para $\phi = 30^\circ$.

Exemplo 2

Calcule o valor médio da potência instantânea.

Solução

Usando a definição de valor médio:

$$V_{\text{médio}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (6)$$

vem:

$$P = \frac{1}{2} V_{\text{máx}} I_{\text{máx}} \cos \phi \quad (7)$$

Onde P (maiúsculo) é o valor médio de p (minúsculo) a potência em função do tempo.

Exemplo 3

Determine o valor *rms* da tensão e da corrente.

Solução

Mais uma vez, usando a definição de valor *rms* (*root mean square*) ou valor eficaz, tem-se:

$$V = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \quad (8)$$

ou seja, a raiz quadrada do valor médio da função ao quadrado. Como:

$$v^2(t) = \frac{V_{máx}^2}{2} \{1 + \cos(2\omega t)\} \quad (9)$$

Então:

$$V = \frac{V_{máx}}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

Da mesma forma:

$$I = \frac{I_{máx}}{\sqrt{2}} \quad (11)$$

Os valores de V e I, sem índice, e em maiúsculo serão considerados os valores rms das grandezas senoidais. A partir da equação (7) é fácil observar que, em um circuito monofásico alimentado por corrente e tensão senoidais, a potência média consumida é dada por:

$$P = VI \cos \phi \quad (12)$$

Onde $\cos \phi$ é chamado de “fator de potência”.

3) Notação Fasorial

Sendo os sistemas de potência predominantemente em corrente alternada, é intuitivo perceber que as grandezas relacionadas serão senoidais. Não é fácil trabalhar com grandezas senoidais, por isto usa-se a notação fasorial para representar uma grandeza senoidal através de um número complexo. É pré-requisito para qualquer engenheiro elétrico um bom domínio de números complexos.

Dada a função senoidal $f(t)$:

$$f(t) = F_{máx} \cos(\omega t + \phi) \quad (13)$$

Define-se o fasor \mathbf{F} como:

$$\bar{F} = \frac{F_{\max}}{\sqrt{2}} e^{j\phi} \quad (14)$$

O fasor \mathbf{F} é um número complexo cujo módulo é igual ao valor rms da função senoidal e a fase corresponde à defasagem entre esta função e uma outra qualquer tomada como referência. Os fasores serão notados em negrito ou com uma barra sobre a letra maiúscula para caracterizar a diferença entre o fasor (complexo) e o valor rms (real). Outras formas alternativas de representação fasorial da função são:

$$\bar{F} = F e^{j\phi} \quad (15)$$

$$\bar{F} = F \angle \phi \quad (16)$$

Ou ainda, na sua forma retangular:

$$\bar{F} = F \cos \phi + jF \sin \phi \quad (17)$$

Exemplo 4

Dado um fasor \mathbf{F} qualquer, qual a função que determina a expressão no tempo?

Solução

Partindo de uma função senoidal:

$$f(t) = F_{\max} \cos(\omega t + \phi) \quad (18)$$

$$f(t) = \text{Re}[F_{\max} \cos(\omega t + \phi) + jF_{\max} \sin(\omega t + \phi)] \quad (19)$$

$$f(t) = \text{Re}\left[\sqrt{2} \frac{F_{\max}}{\sqrt{2}} e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}\right] \quad (20)$$

Da definição de fasor, tem-se:

$$f(t) = \sqrt{2} \text{Re}[\bar{F} e^{j\omega t}] \quad (21)$$

Portanto, dado um fasor, é direta a determinação da grandeza real no tempo. A equação (21) mostra claramente que a definição do fasor elimina a frequência angular da grandeza no tempo. De fato, como em um sistema de corrente alternada, em regime permanente, a frequência é constante, eliminar esta informação simplifica, sem nenhum prejuízo, os cálculos de correntes e tensões em sistemas AC.

Exemplo 5

Determine qual a relação entre um fasor de tensão e um fasor de corrente quando a tensão senoidal estiver aplicada em uma indutância pura.

Solução

$$i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t - \phi) \quad (22)$$

ou, usando a notação fasorial:

$$i(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re}[\bar{I}e^{j\omega t}] \quad (23)$$

Lembrando que a relação entre tensão e corrente em um indutor é dada por:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{d\lambda}{dt} \\ v(t) &= L \frac{di(t)}{dt} \end{aligned} \quad (24)$$

tem-se:

$$\begin{aligned} v(t) &= L\sqrt{2} \operatorname{Re}\left[\frac{d}{dt} \bar{I}e^{j\omega t}\right] \\ v(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re}[j\omega L \bar{I}e^{j\omega t}] \end{aligned} \quad (25)$$

Voltando à definição de fasor, tem-se:

$$\bar{V} = j\omega L \bar{I} \quad (26)$$

Portanto, neste caso, a relação entre os dois fasores é um número puramente imaginário.

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = j\omega L \quad (27)$$

A relação entre o fasor de tensão e o fasor de corrente é, por definição, a impedância do circuito. Pode-se fazer um procedimento análogo para o resistor ou para o capacitor (inicialmente descarregado) e obtém-se respectivamente:

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = R \quad (28)$$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{1}{j\omega C} \quad (29)$$

O produto da indutância pela frequência angular é chamado reatância indutiva. O inverso do produto da capacitância pela frequência angular é chamado reatância capacitiva. Ambos (no MKS) são dados em ohms.

$$X_L = \omega L \quad (30)$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (31)$$

Portanto, com estas definições, pode-se reescrever as

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = jX_L \quad (32)$$

$$\frac{\bar{V}}{\bar{I}} = -jX_C \quad (33)$$

Exemplo 6

Considere um circuito composto por uma resistência de 1Ω em série com uma reatância indutiva de 1Ω . Se for aplicada uma tensão cujo valor rms é igual a 1 V, qual será o valor da corrente circulando por este circuito?

Solução

As impedâncias em série se somam, portanto:

$$\bar{V} = (R + jX_L)\bar{I} \quad (34)$$

O fasor de corrente será dado em relação a uma referência escolhida arbitrariamente. É usual escolher a tensão como referência, portanto:

$$\bar{V} = 1\angle 0 \quad (35)$$

$$\bar{I} = \frac{1\angle 0}{1 + j1} = \frac{1\angle 0^\circ}{1,41\angle 45^\circ} = 0,707\angle -45^\circ = 0,5 - j0,5A \quad (36)$$

Como foi dito, é fundamental o domínio de números complexos e as transformações de polar para retangular necessárias para operações com estes números.

Exemplo 7

Considere uma carga monofásica composta de um resistor de 1Ω em paralelo com uma reatância capacitiva de 1Ω . Se esta carga for alimentada pela mesma fonte de tensão do exemplo anterior, calcular a corrente.

Solução

A corrente no resistor é dada por:

$$\bar{I}_R = \frac{1\angle 0^\circ}{1} = 1\angle 0^\circ A \quad (37)$$

A corrente no capacitor é dada por:

$$\bar{I}_C = \frac{1\angle 0^\circ}{-j1} = 1\angle 90^\circ A \quad (38)$$

Portanto, a corrente total será:

$$\bar{I} = 1 + j1 = 1,41\angle 45^\circ \quad (39)$$

Os fasores, por serem números complexos, podem ser representados graficamente no plano complexo, ou seja, no plano definido pelos eixos real e imaginário. Este diagrama é chamado de diagrama fasorial.

Exemplo 8

Trace o diagrama fasorial das correntes e tensões dos exemplos anteriores.

Solução

O diagrama fasorial do exemplo 6 está mostrado na figura 3.1.

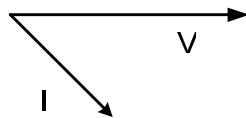


Figura 3.1: Diagrama fasorial do exemplo 6.

Observe que a corrente, neste caso, está atrasada em relação à tensão.

O diagrama fasorial do exemplo 7 está mostrado na figura 3.2.

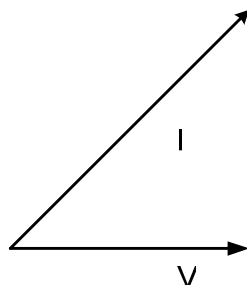


Figura 3.2: Diagrama fasorial do exemplo 7.

Para uma carga capacitiva, a corrente está adiantada em relação à tensão.

4) Circuitos Trifásicos

Este item serve exclusivamente para que o estudante conheça a terminologia usada em circuitos trifásicos. Todos os conceitos são dados em um curso específico.

Dado três circuitos (a, b, c) independentes que são alimentados por três fontes de tensão senoidal defasadas de 120° .

$$\begin{aligned} e_a &= \sqrt{2}E \cos \omega t \\ e_b &= \sqrt{2}E \cos(\omega t - 120^\circ) \\ e_c &= \sqrt{2}E \cos(\omega t + 120^\circ) \end{aligned} \quad (40)$$

A frequência angular destas fontes é ω e o seu valor rms é E.

Representando estes valores pelo seus respectivos fasores tem-se:

$$\begin{aligned} \bar{E}_a &= E \angle 0^\circ \\ \bar{E}_b &= E \angle -120^\circ \\ \bar{E}_c &= E \angle 120^\circ \end{aligned} \quad (41)$$

Considerando que a carga instalada em cada um destes circuitos seja a mesma e representada pela impedância de módulo Z e fase ϕ , a corrente em cada fase será dada por:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_a &= \frac{\bar{E}_a}{Z\angle\phi} = \frac{E\angle 0^\circ}{Z\angle\phi} = I\angle -\phi \\
\bar{I}_b &= \frac{\bar{E}_b}{Z\angle\phi} = \frac{E\angle -120^\circ}{Z\angle\phi} = I\angle -120^\circ - \phi \\
\bar{I}_c &= \frac{\bar{E}_c}{Z\angle\phi} = \frac{E\angle 120^\circ}{Z\angle\phi} = I\angle 120^\circ - \phi
\end{aligned} \tag{42}$$

É fácil observar que o somatório das correntes nas fases é nulo. No caso das cargas (ou impedâncias) serem diferentes, haverá a circulação de uma corrente (normalmente menor que cada uma delas) por um circuito chamado de neutro.

Exemplo 9

Um conjunto de tensões trifásicas equilibradas (1 V) alimenta 3 carga cujo o valor da impedância é o mesmo (1 ohm) mas o fator de potência é diferente. Na fase “a” o fp é unitário. Na fase “b” é igual a 0,92 indutivo e na fase “c” é 0,92 capacitivo. Qual o valor da corrente de neutro.

Solução

O módulo da corrente nas três fases é igual a 1 A. O arco cujo coseno é igual a 0,92 é 23° , portanto:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_a &= 1\angle 0^\circ \\
\bar{I}_b &= \frac{\bar{V}_b}{Z_b} = \frac{1\angle -120^\circ}{1\angle 23^\circ} = 1\angle -143^\circ \\
\bar{I}_c &= \frac{\bar{V}_c}{Z_c} = \frac{1\angle +120^\circ}{1\angle -23^\circ} = 1\angle 143^\circ
\end{aligned} \tag{43}$$

A corrente de neutro será:

$$\begin{aligned}
\bar{I}_n &= \bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c = 1 + (-0,798 - j0,602) + (-0,798 + j0,602) \\
\bar{I}_n &= -0,59\angle 0^\circ
\end{aligned} \tag{44}$$

Mesmo com as cargas razoavelmente bem equilibradas, a corrente de neutro pode assumir valores significativos. No entanto, na maioria dos estudos de sistemas elétricos de potência, admite-se que a carga seja perfeitamente equilibrada e é possível, neste caso, analisar o que se passa em apenas uma das fases. O que ocorre nas outras seria idêntico com 120° de defasagem.

A tensão entre a fase e o neutro é chamada de tensão de fase. A tensão entre duas fases é chamada de tensão de linha.

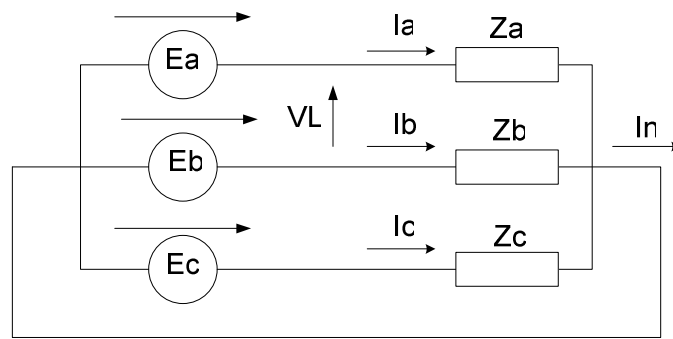


Figura 4.1: Circuito Trifásico conectado em estrela.

Exemplo 10

Determinar o valor da tensão de linha em relação ao valor da tensão de fase.

Solução

Diretamente da Figura 4.1, tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{V}_L &= \bar{E}_a - \bar{E}_b = E\angle 0^\circ - E\angle -120^\circ = E(1 + 0,5 + j0,866) \\ \bar{V}_L &= \sqrt{3}E\angle +30^\circ\end{aligned}\tag{45}$$

Observe que os valores de tensão de linha e de fase são completamente diferentes! Confundir estes valores corresponde a errar inteiramente o problema. É importante saber que quando se trata de sistemas elétricos de potência, a tensão dada na placa dos equipamentos, ou a tensão nominal dos equipamentos é sempre a tensão de linha. Quando for estudado os valores “por unidade” (pu) o problema da raiz de três desaparece.

5) Potência Trifásica

A potência trifásica é por definição a soma da potência em cada uma das fases.

$$P_{3\phi} = v_a i_a + v_b i_b + v_c i_c\tag{46}$$

Exemplo 11

Calcular a potência trifásica absorvida pela carga da figura 2 supondo que ela seja equilibrada.

Solução

No caso de carga trifásica equilibrada as tensões e correntes nas fases estão defasadas de 120° . Tomando os seus valores no tempo tem-se:

$$\begin{aligned} P_{3\phi} = & \sqrt{2}E \cos \omega t \cdot \sqrt{2}I \cos(\omega t - \phi) + \\ & \sqrt{2}E \cos(\omega t - 120^\circ) \cdot \sqrt{2}I \cos(\omega t - \phi - 120^\circ) + \\ & \sqrt{2}E \cos(\omega t + 120^\circ) \cdot \sqrt{2}I \cos(\omega t - \phi + 120^\circ) \end{aligned} \quad (47)$$

Efetuando o produto, usando a identidade trigonométrica definida em (4) e lembrando que três senóides defasadas de 120° somam zero, tem-se:

$$P_{3\phi} = 3EI \cos \phi \quad (48)$$

Como foi dito, é mais comum a utilização do valor da tensão de linha. Portanto, usando (45) obtém-se:

$$P_{3\phi} = \sqrt{3}V_L I \cos \phi \quad (49)$$

A comparação de (48) (ou (49)) com (5) é interessante. Observe que a potência trifásica é constante, depende do valor rms das correntes e tensões e do fator de potência.

6) Potência Complexa Trifásica

A potência complexa é por definição o produto do fasor de tensão pelo conjugado do fasor de corrente. Considerando um circuito trifásico como o da figura 2, tem-se:

$$S = 3\bar{E}\bar{I}^* \quad (50)$$

Note que a potência completa, assim como a impedância, é um número complexo mas não é um fasor porque não representa uma grandeza variando senoidalmente no tempo.

Se a fase do fasor de tensão for α e a do fasor de corrente for β , esta definição da potência complexa (usando o conjugado do fasor de corrente) faz com que o ângulo da potência seja exatamente a defasagem entre tensão e corrente.

$$\begin{aligned} \bar{E} &= E \angle \alpha \\ \bar{I} &= I \angle \beta \\ \bar{I}^* &= I \angle -\beta \\ S &= 3EI \angle \alpha - \beta \end{aligned} \quad (51)$$

O módulo da potência complexa é chamado de potência aparente. A sua unidade é o volt ampère [VA].

Colocando a potência complexa na forma retangular e fazendo $\phi = \alpha - \beta$, tem-se:

$$S = 3EI \cos \phi + j3EI \sin \phi \quad (52)$$

A parte real da potência complexa trifásica é a potência ativa. A parte imaginária é chamada potência reativa.

$$Q = 3EI \sin \phi \quad (53)$$

Portanto, na forma retangular tem-se:

$$S = P + jQ \quad (54)$$

A potência ativa é dada em watt [W] e a potência reativa em volt ampère reativo [var].

O ângulo ϕ , ou o ângulo do fator de potência da carga, define qual a proporção da potência aparente que é transformada em potência ativa (o que é a própria definição de fator de potência) e se a carga está absorvendo ou gerando potência reativa. Quando a corrente está atrasada em relação à tensão ($\phi > 0$), seno de ϕ também é positivo e diz-se que a carga está absorvendo potência reativa ou que é uma carga indutiva.

Por outro lado, quando a corrente está adiantada em relação à tensão, ($\phi < 0$), $Q < 0$, ou seja a carga está absorvendo potência reativa negativa, ou, como é comumente usado, a carga está gerando potência reativa. Diz-se, então, que uma carga capacitiva gera potência reativa.

Exemplo 12

Qual a corrente absorvida por uma carga trifásica de 10 MVA, 13,8 kV, com fator de potência 0,8 indutivo quando ela opera em condições nominais?

Solução

A potência aparente nominal de uma carga trifásica é sempre a potência trifásica assim como a tensão é a de linha. Então:

$$S = \sqrt{3} \cdot V_L \cdot I \quad (55)$$

O módulo da corrente é dado por:

$$|\bar{I}| = \frac{S}{\sqrt{3} V_L} = \frac{10 \text{ MVA}}{\sqrt{3} \cdot 13,8 \text{ kV}} = 418,4 \text{ A} \quad (56)$$

É dado do problema que a corrente está atrasada em relação à tensão. A sua fase é dada pelo arco cujo coseno é 0,8, ou seja $36,8^\circ$. Tomando a tensão como referência, tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \frac{13,8}{\sqrt{3}} \angle 0^\circ \\ \bar{I} &= 418,4 \angle -36,8^\circ\end{aligned}\tag{57}$$

Exemplo 13

Qual seria o tamanho do banco de capacitores que teria que ser instalado nesta carga para que o fator de potência passasse para 0,92 indutivo?

Solução

No exemplo anterior pode-se calcular a potência ativa e a reativa:

$$\begin{aligned}P &= S \cos \phi = 8 \text{ MW} \\ Q(\text{velho}) &= S \sin \phi = 6 \text{ M var}\end{aligned}\tag{58}$$

O que se deseja é calcular um banco de capacitores trifásicos de forma a mudar o fator de potência para 0,92. Então não há nenhuma alteração na potência ativa e a nova potência reativa tem que ser igual a:

$$\begin{aligned}S(\text{novo}) &= \frac{P}{\text{fp}} = \frac{8}{0,92} = 8,69 \text{ MVA} \\ Q(\text{novo}) &= \sqrt{S^2(\text{novo}) - P^2} = 3,4 \text{ M var}\end{aligned}$$

A potência do banco de capacitor é dada por:

$$Q(\text{cap}) = Q(\text{velho}) - Q(\text{novo}) = 2,6 \text{ M var}$$

Observe que o módulo da corrente da carga passa de 418 A para 363 A. O que implica em uma redução significativa das perdas uma vez que estas são função do quadrado da corrente.

Exemplo 14

Calcular a corrente necessária para alimentar uma sala de aula.

Solução

A carga de uma sala de aula é monofásica e é composta por 20 luminárias de 32 W e dois ar condicionados de 700 W cada. Para determinar a corrente é preciso conhecer também o fator de potência da carga. No caso das luminárias vai-se supor um fator de potência igual a 0,9 indutivo. O ar condicionado, segundo o fabricante, tem fator de potência da ordem de 0,92, também indutivo.

A carga, desta forma, está completamente definida.

$$P(\text{ar}) = 2 \cdot 700 = 1.400 \text{ W}$$

$$S(\text{ar}) = 1.400/0,92 = 1.521,7 \text{ VA}$$

$$Q(\text{ar}) = 596,4 \text{ var}$$

$$P(\text{luz}) = 20 \cdot 32 = 640 \text{ W}$$

$$S(\text{luz}) = 640/0,9 = 711,1 \text{ VA}$$

$$Q(\text{luz}) = 310,0 \text{ var}$$

$$P(\text{total}) = 2.040 \text{ W}$$

$$Q(\text{total}) = 906,4 \text{ var}$$

$$S(\text{total}) = 2.232,3 \text{ VA}$$

Como $V = 220$ (considerada a referência fasorial), então:

$$\bar{I} = \left(\frac{S}{\bar{V}} \right)^* = \frac{2.040 - j906,4}{220 \angle 0} = 10,15 \angle -23,96 \text{ A}$$

Exemplo 15

Considerando que a carga de uma escola seja equivalente a 50 salas de aula como descritas no exemplo anterior. Qual a corrente no lado de alta tensão do transformador (13,8 kV/380 V) que alimenta a escola?

Solução

Trata-se de uma carga trifásica. Os dados de tensão, portanto, são tensões de linha. A potência complexa total trifásica será:

$$P = 50 \cdot 2.040 = 102 \text{ kW}$$

$$Q = 50 \cdot 906,4 = 45,3 \text{ kvar}$$

$$S = 111,6 \text{ kVA}$$

$$\bar{I} = \left(\frac{S}{\sqrt{3}V} \right) \angle \arccos(0,914) = \frac{111,6}{\sqrt{3} \cdot 13,8} \angle -23,96 = 4,67 \angle -23,96 \text{ A}$$

REVISÃO DE CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Ivan Camargo

Revisão 1 (abril de 2007)

1) Introdução

Duas grandezas vetoriais estão relacionadas com o campo magnético: a Intensidade do Campo (**H**) e a densidade do campo (**B**).

A intensidade de campo magnético (**H**), relacionada diretamente à causa (ou à origem do campo), ou ainda com a corrente elétrica pela chamada Lei de Ampère.

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1)$$

Onde:

H é a intensidade do campo magnético [A/m];

dl é o comprimento infinitesimal [m];

J a densidade de corrente [A/m²]; e

ds o elemento infinitesimal de superfície [m²].

Todas as grandezas são vetoriais e o produto definido em (1) é o produto escalar entre estes vetores.

Exemplo 1

Determinar a intensidade de campo a uma distância “r” de um condutor muito longo, no vácuo, percorrido por uma corrente “I”.

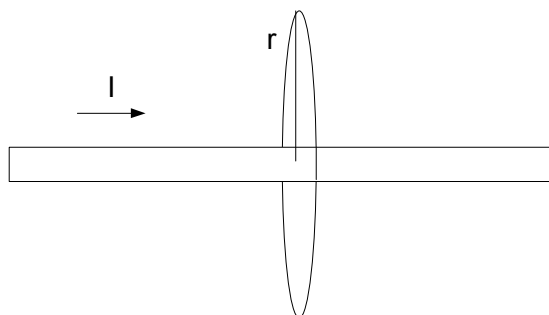


Figura 1.1: Intensidade do campo magnético em um condutor longo

Solução

A uma distância “r” do centro do condutor, supondo que o meio tenha permeabilidade constante, ou seja, que **H** tenha módulo constante, seja perpendicular a “r” em todo ponto da circunferência e co-linear com o vetor **I**, a integral da equação (1) se simplifica muito, ficando apenas:

$$H \oint dl = H \cdot 2\pi r \quad (2)$$

O lado direito da equação representa a corrente total envolvida pela linha de integração. Neste caso particular o valor da corrente é dado e igual a I. Portanto:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (3)$$

Observe que **H** é uma grandeza vetorial, portanto definida com módulo e direção. O módulo é dado pela equação (3) e a direção é dada pela “regra da mão direita”.

A segunda grandeza vetorial importante no estudo dos circuitos magnéticos é a densidade de campo **B**. Esta grandeza está relacionada com os efeitos do campo magnético, com a força (ou conjugado) magnética e com a tensão gerada.

No vácuo, os dois vetores **B** e **H** são sempre proporcionais e co-lineares. A relação entre eles é dada por:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (4)$$

onde μ_0 é a permeabilidade do vácuo. No sistema MKS (que será usado em toda parte nestas notas) o valor desta constante é:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ [H/m]} \quad (5)$$

A densidade de fluxo está relacionada com o fluxo pela seguinte expressão:

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (6)$$

Onde:

ϕ é o fluxo magnético [weber] ou [Wb];

B é a densidade de campo magnético [tesla] ou [T];

ds é o elemento de área [m^2]

Se N espiras de uma bobina for envolvida por um fluxo ϕ , diz-se que o fluxo concatenado com a bobina será dado por:

$$\lambda = N\phi \quad [\text{Wb}] \quad (7)$$

A tensão gerada nos terminais desta bobina é dada pela lei de Faraday:

$$e = -\frac{d\lambda}{dt} \quad [\text{V}] \quad (8)$$

Essa talvez seja a equação mais importante para entender e simular problemas relacionados com conversão de energia.

2) Materiais Ferromagnéticos

A característica básica dos materiais ferromagnéticos é a de produzir um grande efeito, ou seja, um elevado valor de **B**, para uma pequena causa (**H** ou **I** pequenos).

Esta característica pode ser visualizada nas figuras 2.1 e 2.2.

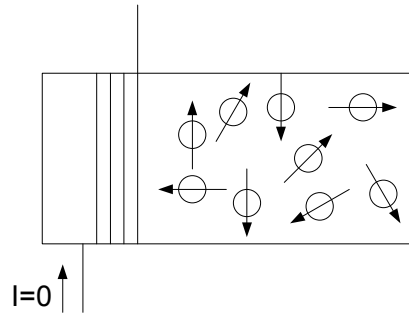


Figura 2.1: Domínios Magnéticos orientados de forma aleatória

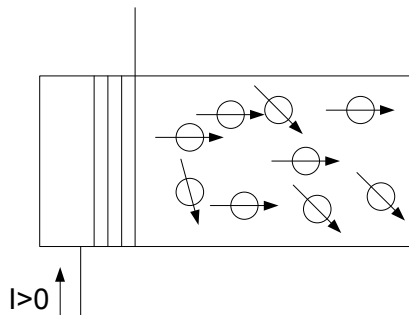


Figura 2.2: Domínios Magnéticos sob o efeito de um campo de intensidade H .

Em materiais ferromagnéticos existem “domínios magnéticos” ou bipolos que normalmente estão orientados de forma aleatória. Havendo a circulação de uma corrente “ I ” pelo condutor, o campo magnético criado polariza os “domínios magnéticos” do material amplificando bastante o efeito da corrente, como pode ser visto na figura 2.2.

A densidade de campo resultante será composta por uma pequena parcela ($\mu_0 H$) que polariza os bipolos e uma outra componente, em geral muito maior, de densidade de campo produzida pelos bipolos orientados.

$$B = \mu_0 H + B_i \quad (9)$$

É possível, em uma determinada faixa, encontrar uma relação de proporcionalidade entre a densidade e a intensidade do campo produzida pelos bipolos magnéticos. Combinando as duas parcelas da equação (9) obtém-se:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (10)$$

onde μ_r é a permeabilidade relativa do material. A permeabilidade relativa é uma grandeza adimensional que pode variar de 100 a 100.000. Para os materiais

ferromagnéticos usados em equipamentos elétricos este número está na faixa de 2.000 a 4.000.

A figura 2.3 mostra a relação entre B e H no vácuo e em um material ferromagnético (M-19). Observa-se, neste último, que a relação linear entre B e H só ocorre para pequenos valores de H.

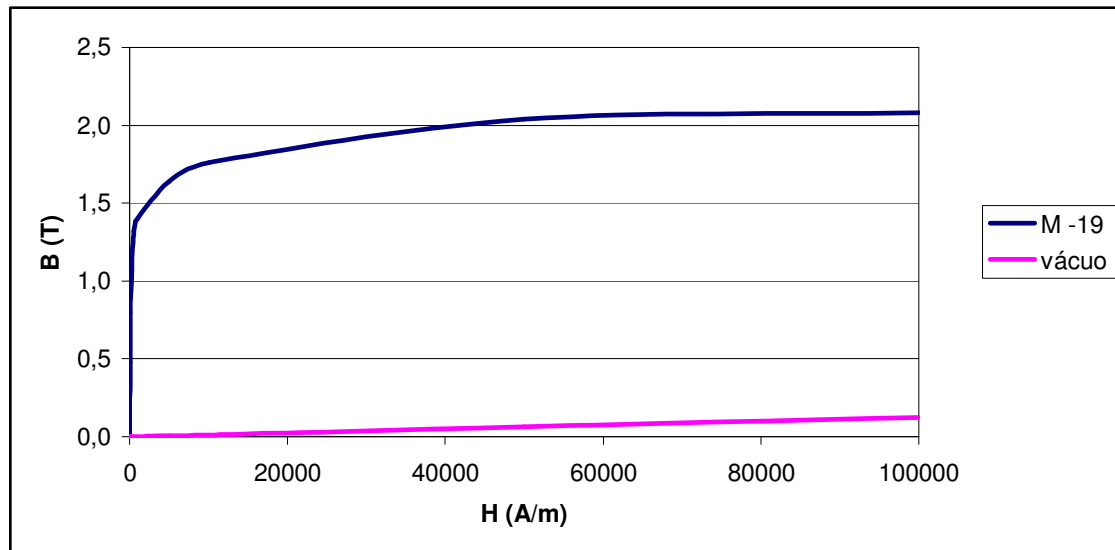


Figura 2.3: Relação entre B e H

A figura 2.3 mostra claramente que a utilização de materiais ferromagnéticos faz com que pequenas causas (H pequeno) produzam grandes efeitos (B grande). Reduzindo-se a escala para evidenciar a parte linear da curva, obtém-se a figura 2.4.

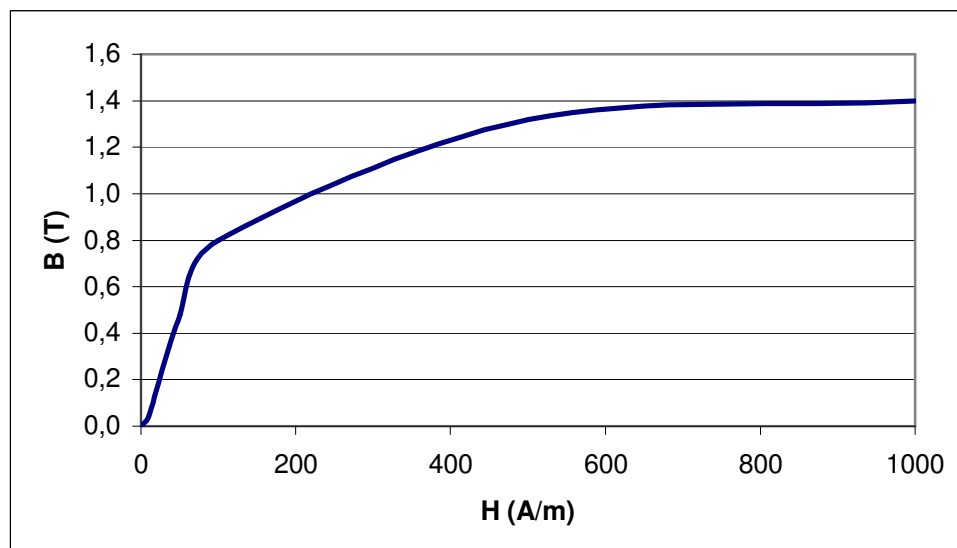


Figura 2.4: Característica B x H (detalhe)

Evidentemente, quando a intensidade de campo atinge um determinado valor onde todos os bipolos do material estejam orientados, não adianta mais aumentar o valor de H que o valor de B só aumenta proporcionalmente a permeabilidade do vácuo. Diz-se, então, que o material está saturado.

A figura 2.5 mostra, esquematicamente, a relação entre B e H (considerando uma aproximação de trechos de retas) levando em conta a saturação.

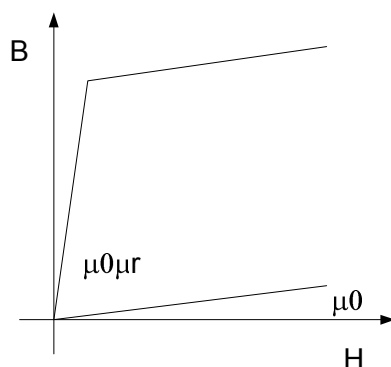


Figura 2.5: Curva $B \times H$ com saturação

A saturação magnética é uma das características mais importantes dos materiais magnéticos. O dimensionamento de um dispositivo de conversão tem que levar em consideração este efeito. O ponto onde o material satura depende das suas características físicas. Em alguns materiais este valor é 0,3 T, em outros 2 T. Pode-se considerar 1 T como um valor típico.

Outro efeito importante no comportamento dos materiais ferromagnéticos é a Histeresis. A curva $B \times H$ real, medida em um material ferromagnético não é uma reta e depende da derivada de H . Para um mesmo valor de H pode-se ter mais de um valor de B dependendo se o H estiver aumentando ou diminuindo. Variando-se ciclicamente a corrente em um condutor envolvendo um núcleo de ferro, obtém-se uma curva com as características mostradas na figura 2.6 onde se observa o efeito da histerese.

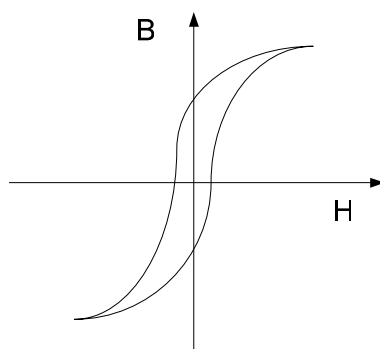


Figura 2.6: Curva de histeresis

A energia fornecida ao material para passar de um valor de densidade de campo $B = 0$ até $B = B_{\text{máx}}$ não é devolvida quando a intensidade de campo volta a zero. Estas perdas são chamadas de perdas por Histeresis e são tanto maiores quanto maior for o nível de saturação do material.

Exemplo 2

Quais seriam as perdas por histeresis em um material ferro-magnético?

Solução

É possível avaliar a energia perdida em um material ferro-magnético quando submetido a uma fonte senoidal de tensão (v) operando a uma frequência (f). Basta supor que o material tenha uma área “ A ” e um comprimento médio “ l ”. A energia será dada por:

$$E = \int p dt$$

$$p = ei$$

$$e = N \frac{d\phi}{dt}$$

Supondo uma intensidade de campo (H) constante ao longo do comprimento “ l ”, a corrente pode ser dada pela lei de Ampère:

$$i = \frac{Hl}{N}$$

Então:

$$E = \int AlHdB = vol \int_{B1}^{B2} HdB$$

A energia, portanto, é proporcional ao volume e à integral de intensidade do campo em função da densidade B . Esta integral corresponde à área interna da curva de histeresis.

3) Circuitos Magnéticos

A alta permeabilidade dos materiais magnéticos permite definir um caminho para o fluxo da mesma forma que a baixa resistividade do cobre permite definir um caminho para circulação de corrente.

O conhecimento que os alunos de engenharia elétrica têm com circuitos elétricos faz com que uma analogia entre circuitos elétricos e magnéticos facilite bastante a compreensão dos efeitos magnéticos.

Esta analogia se baseia nas equações que descrevem os campos:

$$i = \iint \vec{J} d\vec{s} \quad (11)$$

A corrente em um condutor é igual à integral da densidade da corrente na superfície.

$$\phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (12)$$

O equivalente no circuito magnético é o fluxo.

$$v = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (13)$$

A tensão, ou diferença de potencial (ddp) ou força eletromotriz (fem), é igual a integral da intensidade de campo elétrico ao longo de um caminho.

$$Ni = F = \int \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (14)$$

O equivalente nos circuitos magnéticos é a força magnetomotriz (ou fmm).

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (15)$$

A densidade de corrente é igual a condutividade do material multiplicada pela intensidade do campo elétrico.

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} \quad (16)$$

O equivalente nos circuitos magnéticos é a densidade de fluxo.

Definição de Relutância

O conceito de relutância é análogo ao de resistência. Para um condutor o conceito de resistência à passagem de corrente elétrica é bastante óbvio. Supondo um condutor de seção transversal “S” com uma densidade de corrente constante **J**, tem-se:

$$i = J.S = \sigma E.S = \frac{\sigma S}{l} \cdot v \quad (17)$$

Define-se, então resistência como:

$$R = \frac{l}{\sigma S} \quad (18)$$

de onde se obtém a relação entre tensão e corrente em um circuito elétrico conhecida como a lei de Ohm.

$$v = Ri \quad (19)$$

Uma dedução semelhante pode ser feita para a resistência à passagem de um fluxo em um determinado circuito magnético.

Exemplo 3

Calcular a intensidade do campo em um toróide a uma distância “r” do seu centro, supondo que o toróide tenha permeabilidade constante.

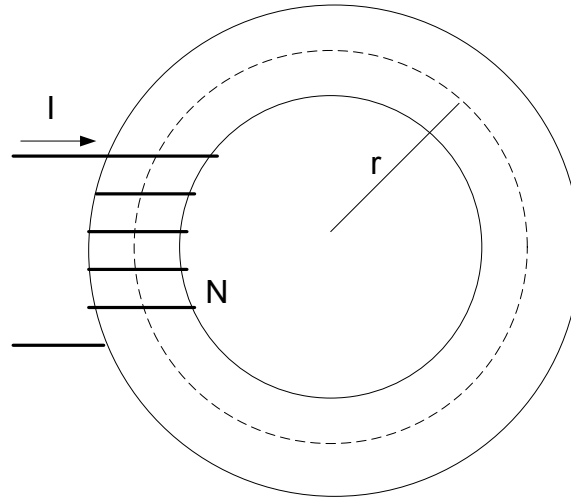


Figura 3.1: Toróide de seção retangular e largura “w”

Solução

De (14) tem-se:

$$Ni = F = \int \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (20)$$

A uma distância “r” do centro, supondo a permeabilidade constante, a intensidade do campo permanece constante. A direção é dada pela regra da mão direita e será sempre colinear com o vetor $d\vec{l}$, desta forma a integral definida em (20) tem resolução simples e direta:

$$H = \frac{Ni}{2\pi r} \quad (21)$$

Exemplo 4

Calcular o fluxo no toróide supondo que a sua largura seja “w”, seu raio interno r_1 e seu raio externo r_2 .

Solução

A densidade do fluxo está relacionada com a intensidade pela característica de permeabilidade do material.

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{Ni}{2\pi r} \quad (22)$$

Usando a definição de fluxo (6):

$$\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (23)$$

lembrando que os vetores são colineares e que a área infinitesimal pode ser dada por:

$$ds = wdr \quad (24)$$

tem-se:

$$\phi = \int_{r_1}^{r_2} \mu_0 \mu_r \frac{Ni w}{2\pi r} dr \quad (25)$$

$$\phi = \mu_0 \mu_r \frac{Ni w}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (26)$$

A pequena dificuldade na integração se deve à variação da intensidade do campo com o raio. Para simplificar ainda mais o problema, em muitas situações, é razoável supor uma intensidade de campo média ao longo do circuito magnético. Neste caso, supondo que a intensidade média seja aquela que percorre o caminho médio do toróide, tem-se:

$$H(\text{médio}) = \frac{Ni}{\bar{l}} \quad (27)$$

Onde, neste caso:

$$\bar{l} = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{2} \quad (28)$$

Sendo a intensidade de campo média suposta constante ao longo do circuito magnético, a densidade de campo também será constante e a integral que define o fluxo se restringe a integração da área infinitesimal ao longo da própria área, portanto:

$$\phi = B(\text{médio}) \int ds = \mu_0 \mu_r H(\text{médio}) . S \quad (29)$$

ou

$$\phi = \frac{\mu_0 \mu_r S}{\bar{l}} Ni \quad (30)$$

Definindo relutância como:

$$\mathfrak{R} = \frac{l(\text{médio})}{\mu_0 \mu_r S} \quad (31)$$

Tem-se uma relação análoga à lei de ohm para circuitos magnéticos:

$$\phi = \frac{F}{\mathfrak{R}} \quad (32)$$

é interessante notar que a definição de relutância está relacionada com as características físicas do circuito magnético, ou seja, com o seu comprimento, com a sua área e com a permeabilidade do material.

Este conjunto de simplificações permite que, para um determinado circuito magnético, com características físicas conhecidas, a relação entre B e H pode ser alterada para uma relação entre a força magnetomotriz e o fluxo. Para isto, basta alterar um fator de escala no gráfico. Ou seja, multiplicar a escala vertical (B) pela área e a horizontal (H) pelo comprimento médio. A figura 3.2 mostra esta alteração.

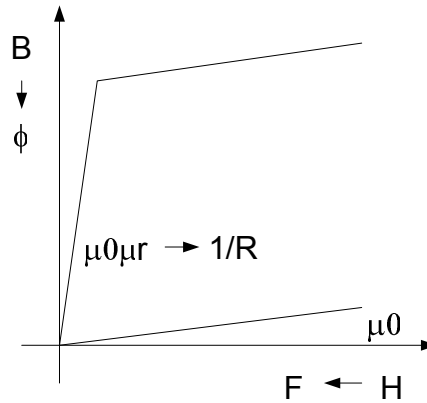


Figura 3.2: Relação entre fluxo e fmm

A declividade da curva da Figura 3.2 é o inverso da relutância. Esta grandeza é chamada de permeância.

$$P = \frac{\mu_0 \mu_r S}{l(\text{médio})} = \frac{1}{\mathfrak{R}} \quad (33)$$

Definição de Indutância

Pode-se ir além, em circuitos magnéticos envolvidos por uma bobina de N espiras, supondo que todo o fluxo esteja restrito ao circuito e por conseqüência envolva (ou concatene) as N espiras da bobina. Multiplicando-se o eixo vertical da figura 3.2 por N, obtém-se o fluxo concatenado com a bobina (pela própria definição). Dividindo-se o eixo horizontal pelo mesmo N obtém-se a corrente e o gráfico da figura 3.2 passa a relacionar fluxo concatenado com corrente. A relação entre estas duas grandezas é chamada de indutância.

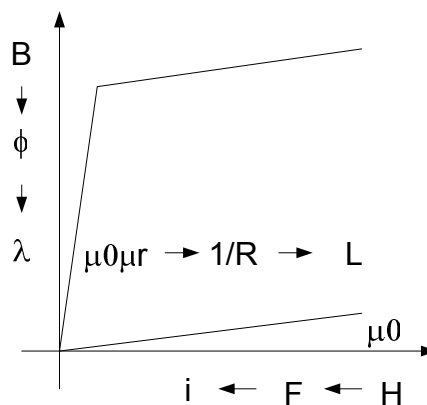


Figura 3.3: Relação entre fluxo concatenado e corrente

Matematicamente, tem-se:

$$L = \frac{\lambda}{i} \quad (34)$$

Pode-se derivar outras expressões definindo a indutância, usando, por exemplo, a definição de relutância, tem-se:

$$L = \frac{\lambda}{i} = \frac{N\phi}{\frac{F}{N}} = \frac{N^2}{\mathfrak{R}} \quad (35)$$

Usando a definição de permeância:

$$L = N^2 P \quad (36)$$

É importante notar que a indutância (assim como a relutância) depende das características físicas do circuito magnético, do número de espiras (ao quadrado), do comprimento, da área e da permeabilidade relativa do material.

Para que haja conversão eletromecânica de energia é necessário que haja movimento entre as partes. Portanto, em conversão, os circuitos magnéticos normalmente têm uma parcela com ar, ou como é comumente chamado, um entreferro.

Exemplo 5

Calcular o fluxo no toróide com entreferro da figura (8) abaixo.

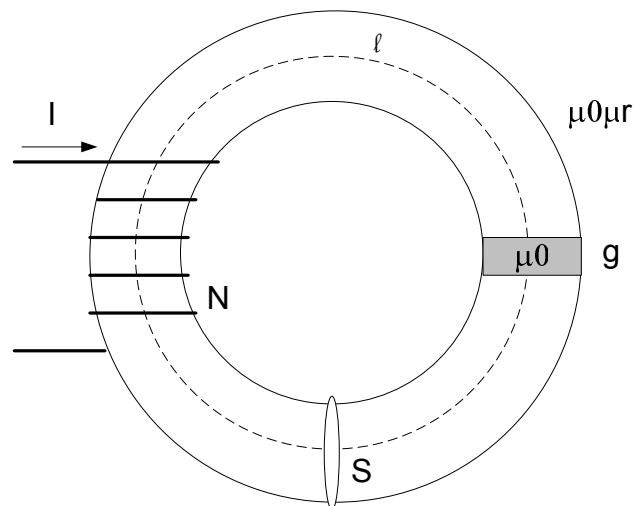


Figura 3.4: Circuito Magnético com entreferro

Solução

O primeiro passo é o cálculo da intensidade de campo ao longo do percurso. Usando a lei de Ampère, tem-se:

$$Ni = \int H dl \quad (37)$$

Neste exemplo a permeabilidade é diferente nos dois meios, portanto não é possível supor H constante. Para retirar a intensidade de campo da integral é preciso dividi-la em duas partes: núcleo e entreferro. Considerando a intensidade constante em cada um destes caminhos, tem-se:

$$Ni = H_n \cdot \ell + H_g \cdot g \quad (38)$$

Onde H_n é a intensidade de campo no núcleo, ℓ é o caminho médio do circuito magnético, H_g é a intensidade de campo no entreferro (ou gap) e “g” é o comprimento do entreferro.

A área da seção transversal do toróide é facilmente definida e pode ser dada por “ S ”. Por outro lado, a área do entreferro tem uma definição um pouco mais delicada uma vez que não existe nenhum limite físico para o ar que envolve o toróide. Considerando que é possível defini-la e que ela é dada por “ A_g ”, e lembrando que ao longo de um caminho magnético o fluxo é contínuo, tem-se:

$$\phi = B_n S = B_g A_g \quad (39)$$

Tomando a relação de proporcionalidade entre a densidade de fluxo e a intensidade do campo:

$$\begin{aligned} B_n &= \mu_0 \mu_r H_n \\ B_g &= \mu_0 H_g \end{aligned} \quad (40)$$

Substituindo-se (39) e (40) em (38), obtém-se:

$$F = Ni = \phi \left\{ \frac{\ell}{S \mu_0 \mu_r} + \frac{g}{A_g \mu_0} \right\} \quad (41)$$

Voltando à definição de relutância, tem-se:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{\ell}{S \mu_0 \mu_r} \\ R_g &= \frac{g}{A_g \mu_0} \end{aligned} \quad (42)$$

$$F = \phi \{ R_n + R_g \} \quad (43)$$

É interessante observar que as relutâncias, da mesma forma que as resistências, em série, se somam. Uma análise da equação (42) mostra também que, mesmo quando o comprimento médio do circuito magnético é muito maior que o entreferro, a relutância do entreferro é a predominante uma vez que a permeabilidade relativa do material ferromagnético é muito grande.

Desprezar a relutância do caminho magnético (ou do núcleo de ferro) simplifica bastante qualquer problema, uma vez que, com esta simplificação o circuito passa a ser linear. Com esta simplificação, a indutância da bobina é dada simplesmente por:

$$L = \frac{N^2}{R_g} \quad (44)$$

Quanto maior o entreferro, menor a indutância. É importante lembrar que o conceito de indutância está relacionado com a proporcionalidade entre corrente e fluxo concatenado, ou seja, causa e efeito. Para que se tenha grandes efeitos, é necessário que as indutâncias sejam grandes, em outras palavras, que os entreferros sejam os menores possíveis.

Exemplo 6

Calcular a indutância da bobina do circuito magnético da Figura 3.5. Suponha que é possível desprezar a relutância do material ferromagnético.

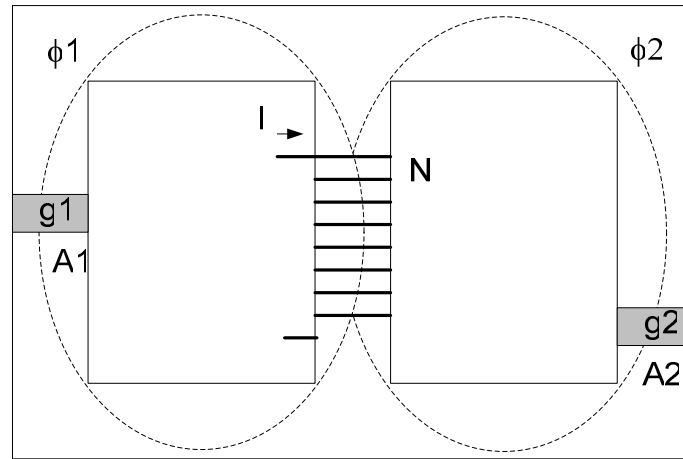


Figura 3.5: Circuito magnético do exemplo 6

Solução

O fluxo é calculado da mesma forma que nos exemplos anteriores. Pela lei de Ampère, tem-se que:

$$Ni = \int H_1 dl \Rightarrow Ni = H_1 g_1 \quad (45)$$

Da mesma forma, escolhendo um caminho de integração que envolva a outra perna do circuito magnético:

$$Ni = \int H_2 dl \Rightarrow Ni = H_2 g_2 \quad (46)$$

A densidade de fluxo é proporcional à permeabilidade do vácuo e o fluxo será a integral da densidade ao longo da área. Mantendo as hipóteses de densidade de fluxo constante é possível calcular (com muita facilidade) o fluxo em cada uma das pernas do circuito magnético:

$$\phi_1 = A_1 B_1 = A_1 \mu_0 H_1 = N i \frac{\mu_0 A_1}{g_1} \quad (47)$$

Da mesma forma:

$$\phi_2 = A_2 B_2 = A_2 \mu_0 H_2 = N i \frac{\mu_0 A_2}{g_2} \quad (48)$$

Usando a definição da permeância (inverso da relutância), tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= F \cdot P_1 \\ \phi_2 &= F \cdot P_2 \end{aligned} \quad (49)$$

O fluxo total concatenado pela bobina será dado pela soma dos fluxos ϕ_1 e ϕ_2 , multiplicado pelo número de espiras.

$$\lambda = N(\phi_1 + \phi_2) = N^2 i (P_1 + P_2) \quad (50)$$

é fácil perceber que, da mesma forma que nos circuitos elétricos, as permeâncias em paralelo se somam.

Finalmente, a indutância é dada por:

$$L = N^2 (P_1 + P_2) \quad (51)$$

4) Circuitos Elétricos Acoplados Magneticamente

Os conceitos vistos no item anterior são absolutamente fundamentais para a compreensão de circuitos elétricos acoplados. Suponha dois circuitos acoplados como mostra a figura 4.1.

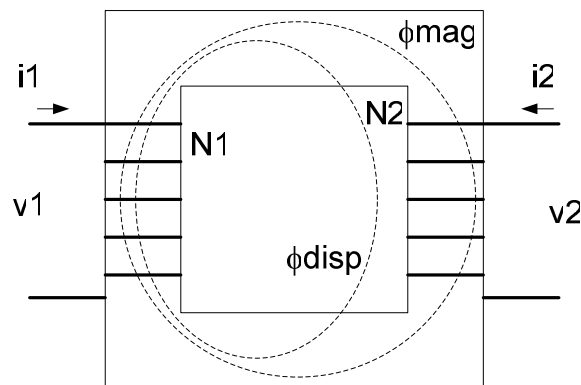


Figura 4.1: Dois circuitos acoplados

Exemplo 7

Quais seriam as equações que descrevem estes dois circuitos elétricos?

Solução

A solução é trivial. À tensão aplicada se opõe uma queda de tensão devido à resistência do enrolamento e outra devido à variação do fluxo concatenado dado pela lei de Faraday.

$$\begin{aligned} v_1 &= r_1 i_1 + \frac{d\lambda_1}{dt} \\ v_2 &= r_2 i_2 + \frac{d\lambda_2}{dt} \end{aligned} \quad (52)$$

A análise foi feita para dois circuitos acoplados mas pode, evidentemente, ser estendida para qualquer número de circuitos. Usando uma notação matricial, tem-se:

$$[v] = [r][i] + \frac{d}{dt}[\lambda] \quad (53)$$

onde:

$$[v] = [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n]^T \quad (54)$$

$$[r] = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$[i] = [i_1 \quad i_2 \quad \dots \quad i_n]^T \quad (56)$$

e

$$[\lambda] = [\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_n]^T \quad (57)$$

Para resolver este sistema de equações é preciso definir qual o fluxo concatenado com cada uma das bobinas.

Exemplo 8

Qual o fluxo concatenado com a bobina 1?

Solução

Se houver uma corrente i_1 circulando na bobina 1, haverá uma força magnetomotriz e um fluxo produzido por esta corrente. O fluxo será inversamente proporcional a relutância do caminho magnético. A relutância do caminho magnético visto pela bobina pode ser dividida em duas, a primeira relacionada ao caminho magnético do ferro e a

outra relacionada com os outros caminhos alternativos por onde é possível que o fluxo passe.

A parcela do fluxo que envolve o circuito magnético, ou, mais precisamente, concatena a bobina que está acoplada com a bobina 1 é chamado de fluxo de magnetização (ϕ_{mag}). O fluxo que não concatena a outra bobina é chamado fluxo de dispersão (ϕ_{disp}).

A circulação de corrente pelo circuito 2 produz um efeito semelhante, ou seja, uma parte do fluxo se dispersa e outra magnetiza a outra bobina. Considerando apenas estas duas bobinas acopladas o fluxo concatenado com a bobina 1 será dado por:

$$\lambda_1 = N_1(\phi_{disp1} + \phi_{mag1} + \phi_{mag2}) \quad (58)$$

Da mesma forma, para a bobina dois:

$$\lambda_2 = N_2(\phi_{disp2} + \phi_{mag2} + \phi_{mag1}) \quad (59)$$

Como foi visto, é conveniente relacionar fluxo concatenado com corrente para eliminar das equações (52) (ou 53) a variável fluxo. Desta forma, pode-se identificar três componentes do fluxo: dispersão e magnetização relacionados à própria corrente circulando na bobina e magnetização provocada pela corrente circulando na outra bobina.

$$\lambda_1 = \lambda_{mag1} + \lambda_{disp1} + \lambda_{mag21} \quad (60)$$

Definindo, então, os seguintes coeficientes de indutância:

$$L_{mag} = \frac{\lambda_{mag}}{i_1} \quad (61)$$

chamada indutância de magnetização.

$$L_{disp} = \frac{\lambda_{disp}}{i_1} \quad (62)$$

chamada indutância de dispersão, e

$$L_{12} = \frac{\lambda_{12}}{i_2} \quad (63)$$

chamada indutância mútua.

A equação de tensão pode, então, ser simplificada para:

$$v_1 = r_1 i_1 + \frac{d}{dt}(L_{mag} + L_{disp})i_1 + \frac{d}{dt}L_{12}i_2 \quad (64)$$

Fazendo uma análise semelhante, obtém-se, para a bobina 2 a seguinte expressão:

$$v_2 = r_2 i_2 + \frac{d}{dt}(L_{mag} + L_{disp})i_2 + \frac{d}{dt}L_{21}i_1 \quad (65)$$

É possível definir as indutâncias em função das relutâncias dos caminhos magnéticos.

Exemplo 9

Definir as indutâncias em função da relutância do caminho magnético.

Solução

Os fluxos definidos na Figura 4.1 podem ser colocados em função da relação entre a força magnetomotriz e a relutância. Assim:

$$\phi_{disp1} = \frac{N_1 i_1}{R_{disp1}} \quad (66)$$

$$\phi_{disp2} = \frac{N_2 i_2}{R_{disp2}} \quad (67)$$

$$\phi_{mag1} = \frac{N_1 i_1}{R_{mag1}} \quad (68)$$

$$\phi_{mag2} = \frac{N_2 i_2}{R_{mag2}} \quad (69)$$

A relutância de magnetização é fácil de calcular. Ela é dada pela relação entre o comprimento médio do circuito magnético pelo produto da permeabilidade e a área. Portanto:

$$R_{mag1} = R_{mag2} = R_{mag} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} \quad (70)$$

Substituindo estas definições nas equações que definem os fluxos concatenados, tem-se:

$$\lambda_1 = \frac{N_1^2}{R_{disp1}} i_1 + \frac{N_1^2}{R_{mag}} i_1 + \frac{N_1 N_2}{R_{mag}} i_2 \quad (71)$$

Usando a definição apresentada do coeficiente de indutância, pode-se definir coeficientes específicos relacionados ao caminho de dispersão e ao de magnetização.

$$L_{disp1} = \frac{N_1^2}{R_{disp1}} \quad (72)$$

$$L_{mag1} = \frac{N_1^2}{R_{mag}} \quad (73)$$

Estas indutâncias, como foi visto, são chamadas respectivamente de dispersão e magnetização. A relação entre o fluxo total produzido pela corrente na bobina “1” e esta corrente é chamada indutância própria da bobina. Diretamente das equações anteriores tem-se:

$$L_{11} = L_{mag1} + L_{disp1} \quad (74)$$

A indutância mútua, por definição, relaciona o fluxo concatenado com uma bobina devido a uma corrente em outra bobina. Então:

$$L_{12} = \frac{\lambda_2}{i_1} \Big|_{i_2=0} \quad (75)$$

$$L_{21} = \frac{\lambda_1}{i_2} \Big|_{i_1=0} \quad (76)$$

Usando a equação (71) tem-se:

$$L_{12} = \frac{N_1 N_2}{R_{mag}} \quad (77)$$

Como a relutância do caminho de magnetização é única, é óbvio que $L_{12} = L_{21}$.

Todas as indutâncias estando definidas, é possível descrever o vetor de fluxo concatenado em função das correntes.

$$[\lambda] = [L][i] \quad (78)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (79)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{disp1} + L_{mag} & L_{12} \\ L_{21} & L_{disp2} + L_{mag} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (80)$$

E a equação de tensão pode ser reescrita da mesma forma que em (64) e (65). Observe que, nestas equações aparecem 5 coeficientes de indutância diferentes.

Exemplo 10

Propor uma mudança de variáveis de forma a simplificar o circuito equivalente de dois circuitos acoplados.

Solução

Para simplificar o circuito equivalente é interessante que a mútua e as indutâncias de magnetização tenham o mesmo valor numérico. Para isto, considera-se uma corrente fictícia i'_2 que produz a mesma fmm que i_2 se estivesse circulando no enrolamento 1. Ou seja:

$$i'_2 = \frac{N_2}{N_1} i_2 \quad (81)$$

Este procedimento é chamado referir o enrolamento “2” ao enrolamento “1”. Evidentemente seria possível fazer a mesma coisa em relação ao enrolamento “1”.

Para que neste novo sistema a potência permaneça inalterada, tem-se:

$$p_2 = v_2 i_2 = v'_2 i'_2 \quad (82)$$

Então:

$$v'_2 = \frac{N_1}{N_2} v_2 \quad (83)$$

Como o tempo também deve permanecer inalterado em qualquer troca de variáveis, a relação entre os fluxos concatenados real e fictícios é dada por:

$$\lambda'_2 = \frac{N_1}{N_2} \lambda_2 \quad (84)$$

Substituindo na equação (80) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{disp1} + L_{mag1} & \frac{N_1}{N_2} L_{12} \\ \frac{N_1}{N_2} L_{21} & \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 (L_{disp2} + L_{mag2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i'_2 \end{bmatrix} \quad (85)$$

Voltando à definição das indutâncias, observa-se facilmente que:

$$L_{mag1} = \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 L_{mag2} = \frac{N_1}{N_2} L_{12} = L_M \quad (86)$$

A equação de tensão pode então ser reescrita como:

$$v_1 = r_1 i_1 + L_{disp1} \frac{di_1}{dt} + L_M \frac{d}{dt} (i_1 + i'_2) \quad (87)$$

$$v'_2 = r'_2 i'_2 + L'_{disp2} \frac{di'_2}{dt} + L_M \frac{d}{dt}(i_1 + i'_2) \quad (88)$$

E o circuito equivalente é dado por:

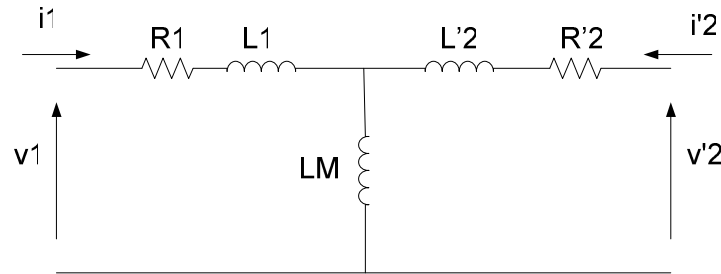


Figura 4.2: Circuito “T” equivalente de circuitos elétricos acoplados

Para simplificar a notação o índice “disp” das indutâncias de dispersão foi eliminado na figura 4.1.

Aplicações do conceito de indutância

Exemplo 11

Traçar a curva da corrente em função do tempo no dispositivo da Figura 4.3 considerando que o dispositivo abre em $t = T_0$ e fecha em $t = T_1$.

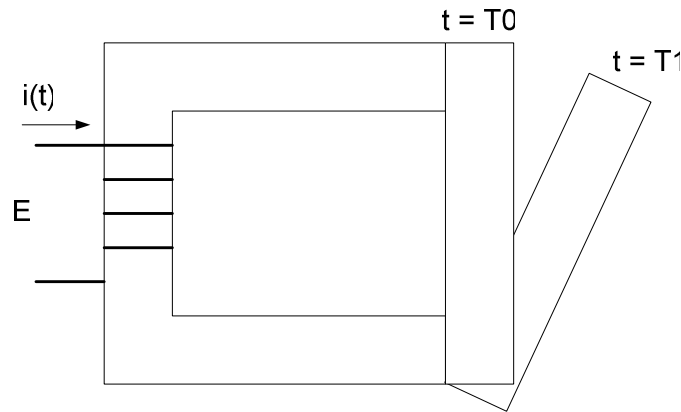


Figura 4.3: relé do Exemplo 11

Solução

Considerando que o dispositivo estivesse fechado no tempo anterior a $t = T_0$, é muito fácil calcular a corrente circulando na bobina. De fato, a equação que relaciona corrente e tensão é dada por:

$$v = ri + \frac{d\lambda}{dt} \quad (89)$$

A fonte de tensão é contínua, portanto $v = E$. O fluxo produzido pela força magnetomotriz, seja qual for, é constante, então:

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (90)$$

Portanto, para os tempos anteriores a $t = T_0$, tem-se $i = E/R$.

Em $t = T_0$ o dispositivo é aberto. Esta abertura provoca um aumento significativo da relutância do caminho magnético, ou seja, o fluxo tenderia a diminuir. Como o fluxo não pode variar instantaneamente, caso contrário a derivada da equação (89) tende a infinito, então a corrente aumenta de forma a manter o produto Li constante. Com o passar do tempo, e as perdas inerentes da resistência da bobina, a corrente volta a se estabilizar no mesmo valor E/R . É claro que, neste novo equilíbrio, o fluxo é muito menor que o inicial.

Finalmente, fechando novamente o dispositivo, o processo se repete ao contrário, ou seja, a corrente diminui instantaneamente para depois voltar ao seu valor de regime. O gráfico da corrente em função do tempo é mostrado na Figura 4.3.

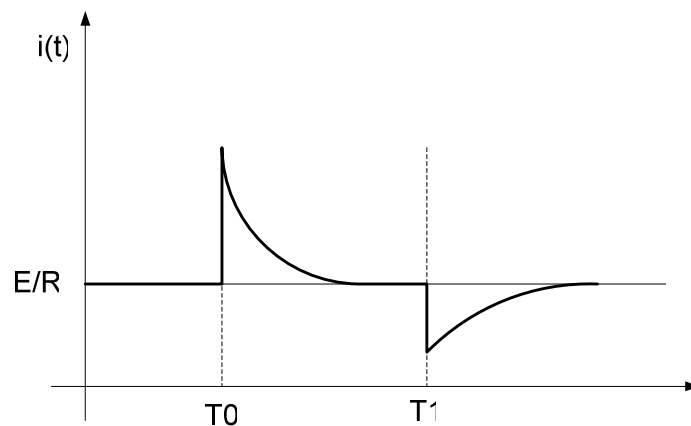


Figura 4.3: Corrente em função do tempo em um relé

Exemplo 12

Calcular a indutância vista pela bobina “1” quando a bobina “2” está curto-circuitada. Desprezar o valor das resistências.

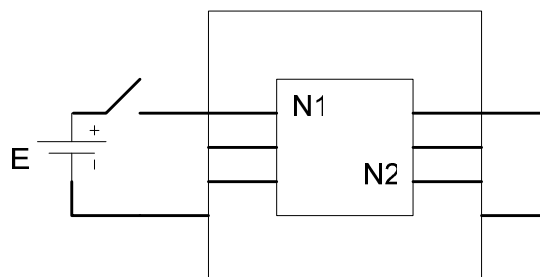


Figura 4.4: Dispositivo do exemplo 12.

Solução

Considerando, inicialmente, que o material esteja desmagnetizado o fluxo de magnetização é nulo. Portanto, o fluxo concatenado com as duas bobinas é nulo.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (91)$$

Fechando a chave, a taxa de variação da corrente é dada pela indutância vista. O aumento da corrente na bobina 1 provoca um aumento do fluxo no circuito magnético. No entanto, como o fluxo inicial na bobina 2 é nulo e como a resistência está sendo desprezada, este valor deve permanecer inalterado. Usando a definição do fluxo concatenado tem-se:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (92)$$

Então:

$$\begin{aligned} \lambda_2 = 0 &= L_{21}i_1 + L_{22}i_2 \\ i_2 &= -\left(\frac{L_{21}}{L_{22}}\right)i_1 \end{aligned} \quad (93)$$

Substituindo na expressão que define o fluxo concatenado com a bobina “1”, tem-se:

$$\lambda_1 = L_{11}\left(1 - \frac{L_{12}^2}{L_{11}L_{22}}\right)i_1 \quad (94)$$

Define-se o termo entre parênteses da equação (94) como coeficiente de dispersão.

$$\sigma_{12} = 1 - \frac{L_{12}^2}{L_{11}L_{22}} \quad (95)$$

A relação entre o fluxo e a corrente será dada por:

$$\frac{\lambda_1}{i_1} = L_{11}\sigma_{12} \quad (96)$$

É interessante notar que, sem deixar o fluxo variar na bobina dois, o único caminho disponível para o fluxo produzido pela fmm da bobina um é o caminho de dispersão. Como o coeficiente dispersão é sempre menor que um, a indutância vista por bobinas acopladas em situação de curto circuito é pequena provocando grandes valores de correntes.

Exemplo 13

Calcule o coeficiente de dispersão usando o circuito “T” equivalente.

Solução

Com as hipóteses feitas no exemplo 12, a resistência é desprezada e a relação entre o fluxo e a corrente pode ser visualizada com o secundário em curto circuito.

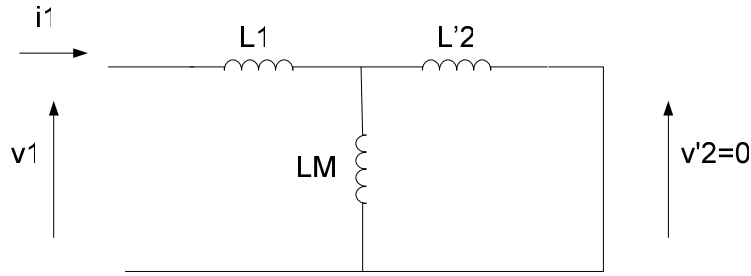


Figura 4.5: Circuito equivalente

A indutância equivalente é dada por:

$$L_{eq} = L_1 + \frac{L_M L'_2}{L_M + L'_2} = L_1 + \frac{L_M L'_2 + L_M^2 - L_M^2}{L_M + L'_2} = L_1 + L_M - \frac{L_M^2}{L_{22}} = L_{11} \left(1 - \frac{L_M^2}{L_{11} L_{22}}\right) = L_{11} \sigma_{12} \quad (97)$$

Como era esperado.

5) Corrente de Excitação

O circuito equivalente da figura 4.2 mostra o caso de duas bobinas acopladas quando a relação entre fluxo concatenado e corrente é linear. Na realidade, a característica B x H dos materiais ferro-magnéticos, além de não ser linear, apresenta a histeresis. É interessante calcular a corrente de excitação considerando esta particularidade.

Exemplo 14

Suponha uma bobina alimentada por uma tensão puramente senoidal. Qual a forma de onda da corrente de excitação.

Solução

Supor que a tensão seja senoidal equivale a dizer que o fluxo também é senoidal. As duas grandezas estão defasadas de 90°.

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi \sin(\omega t) \\ v &= \frac{d\lambda}{dt} = N \frac{d\phi}{dt} \\ v &= N\Phi\omega \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (98)$$

Sendo, por hipótese, o fluxo uma onda puramente senoidal, deve-se determinar qual o valor da corrente, no tempo, que produza esta onda senoidal, levando em consideração que a relação B x H não seja linear.

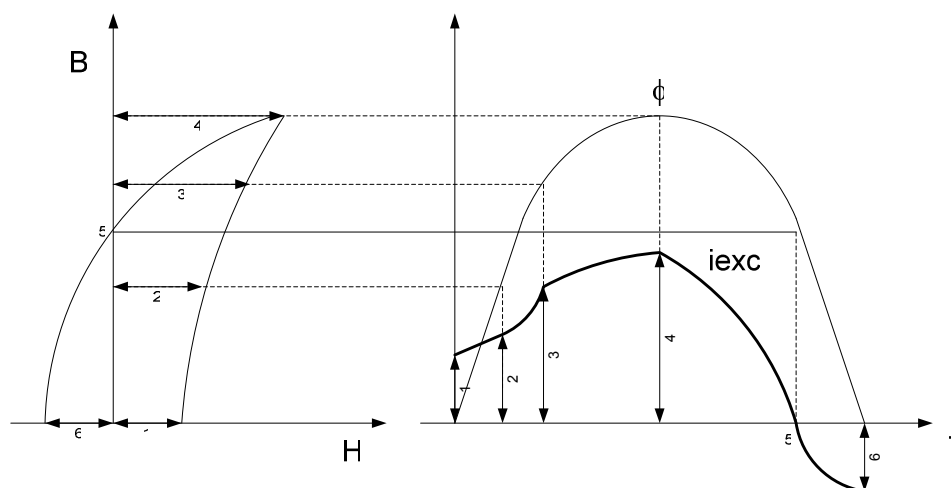


Figura 5.1: corrente de excitação

A corrente de excitação não é senoidal mas é periódica.

A saturação provoca uma distorção no valor de pico da corrente (4) e a histeresis provoca um adiantamento da corrente em relação ao fluxo.

Como a onda é periódica, é possível fazer a sua decomposição em série de Fourier. Esta decomposição mostra que o harmônico mais importante é o terceiro.

Normalmente, para analisar o transformador em regime permanente, usa-se desprezar as harmônicas e considerar que a corrente de excitação tenha apenas sua componente fundamental.

Considerando apenas a componente fundamental da corrente de excitação (60 Hz) ela pode ser representada através de um diagrama fasorial. A figura 5.2 mostra o diagrama fasorial que representa a corrente de excitação. Como foi visto, a corrente está adiantada em relação ao fluxo devido ao efeito da histeresis. Observa-se uma componente importante, em fase com o fluxo, chamada de corrente de magnetização. A componente em fase com a tensão é chamada de corrente de perdas no núcleo. Fasorialmente, tem-se:

$$\bar{I}_{exc} = \bar{I}_{mag} + \bar{I}_n \quad (99)$$

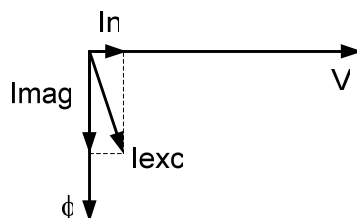


Figura 5.2: Diagrama Fasorial

Levando em consideração que a corrente de perdas no núcleo pode representar não apenas a histeresis, mas também as correntes de Foucault, o circuito equivalente de duas bobinas acopladas pode ser aperfeiçoado com a inclusão de uma resistência equivalente

que representaria todas as perdas no núcleo. Esta resistência é chamada de resistência de perdas no núcleo (R_n). A figura 5.3 mostra o circuito equivalente completo.

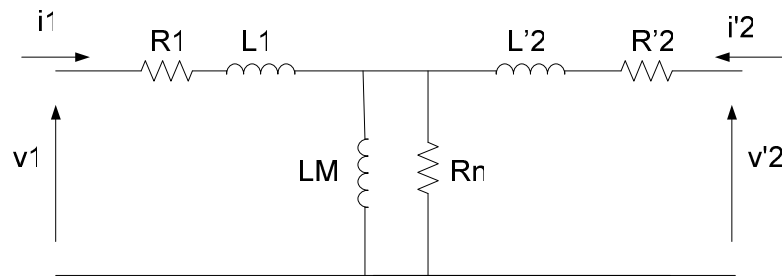


Figura 5.3: Circuito equivalente de duas bobinas acopladas

Evidentemente, o circuito equivalente do transformador tem que semelhante ao circuito mostrado na figura 5.3.

6) Referências Bibliográficas

- [1] SEN, P.C. "Principles of Electric Machines and Power Electronics", New York, John Wiley and Sons, 1996.
- [2] MATSCH, L. W., MORGAN, J. D., "Electromagnetic and Electromechanical Machines", Harper and Row, NY, 1986.
- [3] FITZGERALD, A. E., KINSLEY, C., KUSKO, A., "Máquinas Elétrica", McGraw Hill, São Paulo, 1979.
- [4] Kimbark, E.W., "Power System Stability", Dover Publication, Inc, NY, 1956.
- [5] NASAR, S. A., "Electric Machines and Transformers", Macmillan, NY, 1984.
- [6] NASAR, S. A., "Máquinas Elétricas", Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1984.

TRANSFORMADORES TRIFÁSICOS

Ivan Camargo

Março de 2007

1) Introdução e Aspectos Construtivos

Os transformadores trifásicos são equipamentos indispensáveis para o funcionamento de um sistema elétrico. O transformador permite adequar o nível de tensão à necessidade de geração, transmissão ou distribuição de energia.

O nível de tensão dos geradores, considerando o desenvolvimento tecnológico atual, é da ordem de dezenas de quilo-volt (kV). Os geradores de Itaipu, por exemplo, têm tensão nominal igual a 18 kV. Nos de Tucuruí a tensão é de 13,8 kV.

Para que a transmissão ocorra com baixos níveis de perdas técnicas (proporcionais ao quadrado da corrente), é interessante que o valor da tensão seja bastante elevado. A transmissão em corrente alternada no Brasil é feita em 745, 500, 230 e 138 kV. Para ligar o gerador ao sistema de transmissão é necessário um transformador trifásico.

Finalmente, para adaptar o nível de tensão às necessidades de consumo, são necessários outros transformadores (de distribuição).

Os carregamentos dos transformadores de transmissão e de distribuição são diferentes. Os primeiros têm uma carga aproximadamente constante dada pelo nível de geração. Os outros dependem da carga, ou seja, apresentam uma curva de carga do local onde estão instalados.

O transformador é composto por bobinas de cobre acopladas através de um núcleo de material ferro-magnético. As bobinas podem “envolver” o núcleo e o transformador é chamado de “núcleo envolvido” (“*core type*” – em inglês) ou serem envolvidas pelo núcleo. Nesse caso são chamadas de “núcleo envolvente” (*shell type*).

O princípio de funcionamento do transformador se baseia na Lei de Faraday, ou seja, que a tensão é dada pela variação do fluxo concatenado com a bobina. O material ferro magnético também apresenta tensões induzidas. Para reduzir as correntes de circulação no núcleo, ele é laminado e cada lâmina é isolada para redução das chamadas perdas por correntes de circulação.

Outro aspecto muito importante na construção de um transformador é a sua refrigeração. Normalmente, os enrolamentos são imersos em óleos isolantes que mantêm as bobinas em temperaturas apropriadas. A operação do transformador em sobrecarga produz um excesso de aquecimento e a perda de sua vida útil.

As condições operativas dos transformadores podem ser avaliadas através da análise cromatológica do óleo interno. O acompanhamento do óleo do transformador é um dos

procedimentos de manutenção mais utilizados pelas empresas de transmissão e distribuição.

Este tópico pretende analisar o comportamento do transformador trifásico em regime permanente. Observa-se que o circuito equivalente do transformador é a superposição dos efeitos magnéticos de um acoplamento ideal acrescido dos “problemas” característicos dos materiais usados. Inicia-se a análise considerando um comportamento ideal para, em seguida, considerar as particularidades e perdas relativas a um equipamento real.

2) O Transformador Ideal

O transformador ideal, por definição, é aquele que a resistividade do cobre é nula e a permeabilidade do núcleo de ferro é infinita. Matematicamente:

$$\begin{aligned}\rho &= 0 \\ \mu &= \infty\end{aligned}\tag{1}$$

A consequência da primeira propriedade é óbvia: a resistência dos enrolamentos pode ser desprezada. A característica ideal do material ferro magnético tem duas consequências: a relutância do caminho magnético é nula e, portanto, todo o fluxo se concentra no núcleo não havendo dispersão.

Lembrando da definição de relutância:

$$\mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A}\tag{2}$$

Onde a permeabilidade total (μ) é o produto da permeabilidade relativa (μ_r) pela permeabilidade do vácuo (μ_0). Observa-se que a relutância do material ferro magnético é nula. Se uma força magnetomotriz (F) for produzida por qualquer um dos enrolamentos acoplados deste transformador ideal, vai-se produzir um fluxo que estará totalmente circunscrito ao material. A dispersão, que pode ser representada por uma relutância diferente de zero no circuito equivalente, não permite a passagem de fluxo uma vez que o outro caminho, chamado de “magnetização”, tem relutância zero. A figura 2.1 mostra dois circuitos elétricos acoplados e a figura 2.2 o circuito magnético equivalente do transformador ideal.

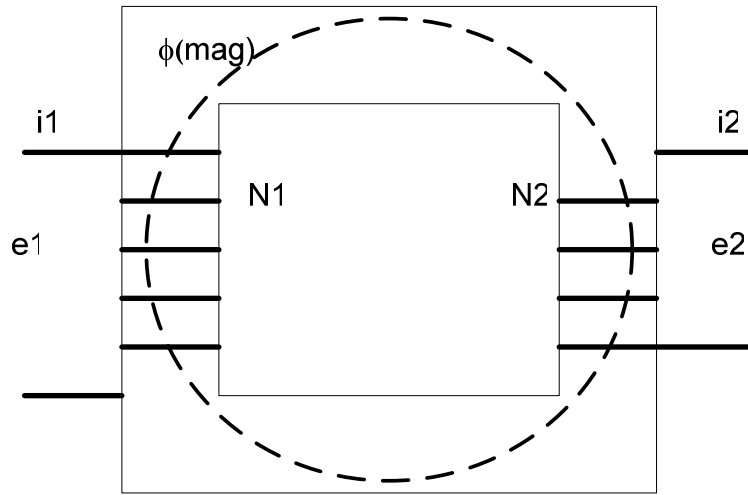


Figura 2.1: Circuitos acoplados

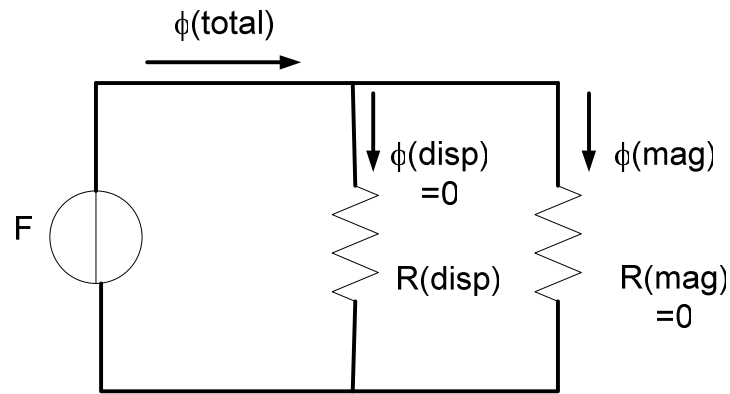


Figura 2.2: Circuito Magnético do Transformador Ideal

A relação entre a tensão no enrolamento primário (e_1) e a tensão do enrolamento secundário (e_2) é obtida facilmente considerando a Lei de Faraday, que o fluxo que concatena os dois enrolamentos é o mesmo ($\phi(\text{mag})$) e que o primário tem N_1 espiras e o secundário N_2 espiras.

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{d\lambda_1}{dt} = N_1 \frac{d\phi_{\text{mag}}}{dt} \\ e_2 &= \frac{d\lambda_2}{dt} = N_2 \frac{d\phi_{\text{mag}}}{dt} \end{aligned} \quad (3)$$

Se a variação do fluxo de magnetização com o tempo for diferente de zero, tem-se:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} = a \quad (4)$$

Onde “a” é a “relação de transformação” do transformador.

A equação (4) mostra a característica básica do comportamento do transformador: ajustar a tensão ao nível adequado.

O que ocorre quando uma carga é ligada ao secundário do transformador? Uma corrente i_2 vai circular no secundário. Essa corrente vai produzir uma força magnetomotriz (F_2) no secundário. Como o fluxo ($\phi(\text{mag})$) não pode variar instantaneamente, aparece uma outra força magnetomotriz no primário (F_1) de forma a equilibrar o fluxo no circuito magnético. A equação de equilíbrio da força magnetomotriz em um circuito magnético pode ser descrita como:

$$F_1 = F_2 \quad (5)$$

Usando a definição de força magnetomotriz:

$$N_1 i_1 = N_2 i_2 \quad (6)$$

Ou, colocando (6) em função da relação de transformação “a”:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{1}{a} \quad (7)$$

As equações (4) e (7) valem para os valores instantâneos de corrente e de tensão. No entanto, quando se pretende analisar o transformador em regime permanente, é mais usual representar corrente e tensão pelos seus respectivos fasores. O valor do fasor de corrente (I_2) será dado pela relação entre o fasor de tensão (E_2) e a impedância do secundário (Z_2). Matematicamente:

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{Z_2} \quad (8)$$

A impedância, por definição, é a relação entre o fasor de tensão e o fasor de corrente.

Em muitos problemas é interessante representar o que ocorre no secundário a partir das grandezas do primário. Em termos técnicos, diz-se que as grandezas do secundários são referidas ao primário. Para representar o efeito da impedância Z_2 no primário basta usar as definições (4) e (7).

$$Z_2 = \frac{\bar{E}_2}{\bar{I}_2} = \frac{\bar{E}_1 / a}{a \bar{I}_1} = Z_1 / a^2 \quad (9)$$

Ou

$$Z_1 = a^2 Z_2 \quad (10)$$

Para representar o efeito da impedância Z_2 no primário, basta multiplicá-la pelo quadrado da relação de transformação.

Outra característica importante dos transformadores que pode ser observada considerando a operação ideal é a “polaridade”.

A direção da intensidade de campo (H) e a da força magnetomotriz (F) produzida por um enrolamento é dada pela “regra da mão direita”. Considerando uma corrente i_1 positiva entrando na parte superior da bobina (figura 2.1), a direção da fmm positiva será para cima. Da mesma forma, considerando como positiva a corrente i_2 saindo da parte superior do enrolamento 2 (em direção à carga), a direção da fmm positiva será para baixo. A fmm produzida depende de como a bobina está enrolada no núcleo. Como, normalmente, não se tem acesso visual ao enrolamento, a polaridade indica como a bobina está enrolada.

Considere dois enrolamentos acoplados tal que as correntes positivas entrando no transformador produzam fluxos na mesma direção. A figura 2.3 mostra esta situação. Observe que o enrolamento 2 tem polaridade oposta àquele da figura 2.1.

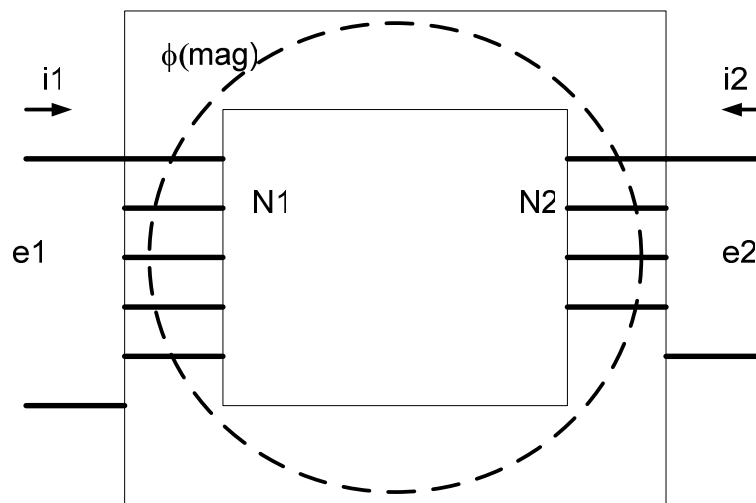


Figura 2.3: Definição de polaridade.

Neste caso, a tensão e_1 está em fase com a tensão e_2 . Usa-se pontos para indicar a polaridade do transformador.

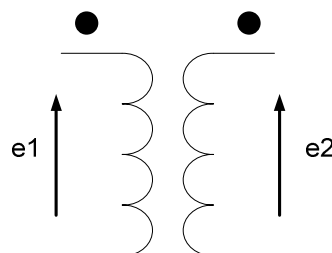


Figura 2.4: Polaridade

Para determinar a polaridade de um transformador basta aplicar a tensão no primário (V12, por exemplo), ligar dois terminais e medir a tensão nos outros dois. A figura 2.5 mostra a configuração.

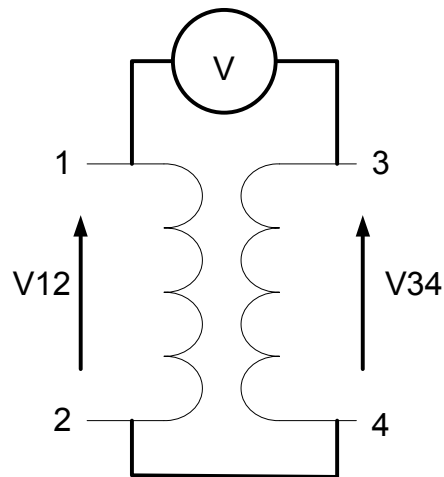


Figura 2.5: Medição da polaridade

Com essa configuração a tensão medida no voltímetro (V13) é igual a diferença entre as tensão V12 e V34.

$$\bar{V}_{13} = \bar{V}_{12} - \bar{V}_{34} \quad (11)$$

O voltímetro mede o valor rms da tensão. Então, se a tensão medida for menor que a tensão aplicada (V12), a polaridade será “1 – 3” (como na figura 2.4). Se a tensão medida for maior que a tensão aplicada, então a polaridade será “1 – 4”, ou seja, a tensão induzida estará defasada de 180° em relação à tensão aplicada.

A determinação da polaridade dos transformadores é indispensável quando uma carga é alimentada por transformadores em paralelo.

3) Transformadores Reais

As características do transformador real podem ser representadas por duas equações:

$$\begin{aligned} \rho &\neq 0 \\ \mu &\neq \infty \end{aligned} \quad (12)$$

Como a resistividade de qualquer material é diferente de zero, é preciso representar a resistência das bobinas. Normalmente essa representação é feita usando parâmetros concentrados.

A permeabilidade do material ferro magnético sendo diferente de infinito produz duas consequências importantes. A relutância de magnetização diferente de zero faz com que parte da fmm seja usada para magnetizar o material. Além disto, o caminho de dispersão passa a ser um caminho possível para o fluxo. A representação do transformador real de dois enrolamentos pode ser visualizada na figura 3.1.

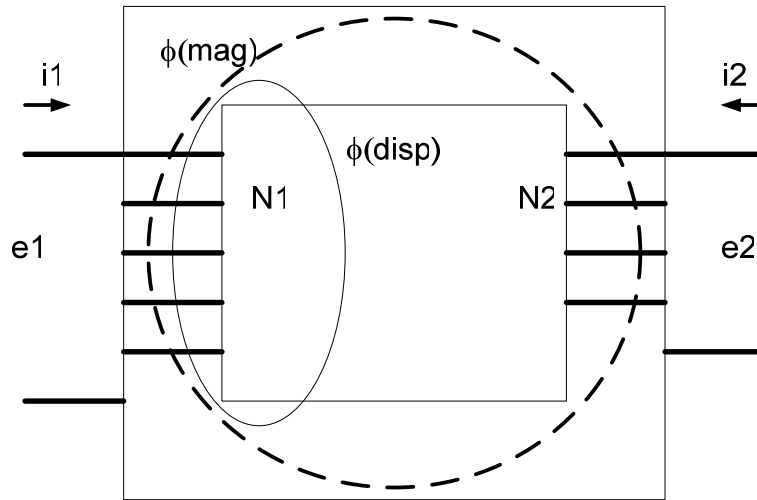


Figura 3.1: Diagrama do Transformador Real

Considerando o fluxo de dispersão ($\phi(\text{disp})$), observa-se que o fluxo total produzido pela bobina 1 não concatena a bobina 2. Desta forma, como o coeficiente de indutância é usado para relacionar fluxo concatenado com corrente, ele deve ser dividido em duas parcelas.

$$L_{11} = \frac{\lambda_1}{i_1} = \frac{N_1(\phi_{\text{mag}} + \phi_{\text{disp}})}{i_1} \quad (13)$$

Que é a definição de indutância própria.

$$L_{\text{mag}} = \frac{\lambda_{\text{mag}}}{i_1} = \frac{N_1\phi_{\text{mag}}}{i_1} \quad (14)$$

A indutância de magnetização, e

$$L_1 = \frac{\lambda_{\text{disp}}}{i_1} = \frac{N_1\phi_{\text{disp}}}{i_1} \quad (15)$$

A indutância de dispersão. Então:

$$L_{11} = L_1 + L_{\text{mag}} \quad (16)$$

Além da resistência (que representa as perdas no cobre) e da dispersão (que leva em consideração a característica real do material ferro magnético), é preciso representar as perdas no ferro no transformador real.

As perdas no ferro têm duas componentes principais. Aquela relativa às correntes de circulação (que são minimizadas pela laminação do ferro) e aquela relativa à histeresis do material. As perdas por histeresis são proporcionais à frequência. A cada ciclo, uma determinada quantidade de energia é gasta para magnetizar e desmagnetizar o material. Além disto, elas aumentam muito com o aumento da saturação. A saturação depende do material e do nível de magnetização do material. Quanto maior a tensão, maior a

saturação. Para representar estas perdas usa-se a “resistência de perdas no núcleo” (R_n). Colocando esta resistência em paralelo, as perdas no ferro ficam proporcionais ao quadrado da tensão o que é uma representação razoável destas perdas.

O transformador real é, então, representado pelo transformador ideal acrescido das imperfeições: resistência do cobre, perdas no ferro, dispersão e magnetização. A figura 3.2 mostra o circuito equivalente do transformador.

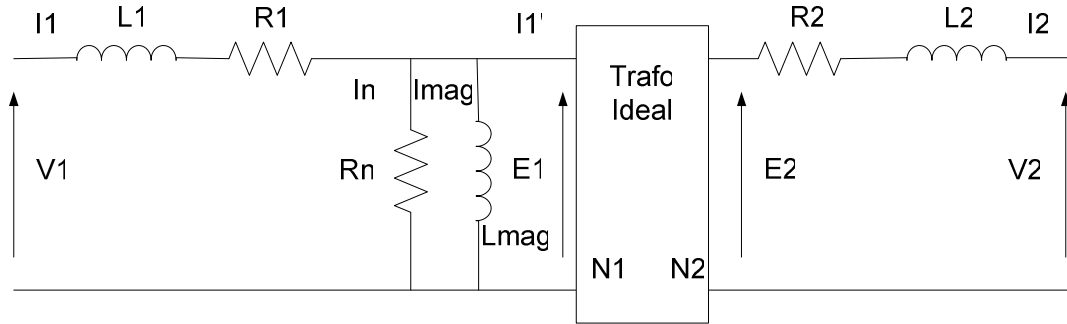


Figura 3.2: Circuito Equivalente do Transformador Real

As relações entre tensão de entrada e saída do transformador ideal continuam valendo, assim com a relação entre as correntes.

$$\frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_2} = \frac{N_1}{N_2} = a \quad (17)$$

$$\frac{\bar{I}'_1}{\bar{I}_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a} \quad (18)$$

Como foi visto, tudo que ocorre no secundário pode ser refletido no primário. O efeito da resistência do enrolamento secundário assim como o efeito da dispersão podem ser considerados no primário. Para isto, basta multiplicar o valor em ohms da resistência e da reatância pelo quadrado do número de espiras. Fazendo:

$$X_2 = \omega L_2 \quad (19)$$

$$X'_2 = a^2 X_2 \quad (20)$$

$$R'_2 = a^2 R_2$$

O novo circuito equivalente está representado na figura 3.3.

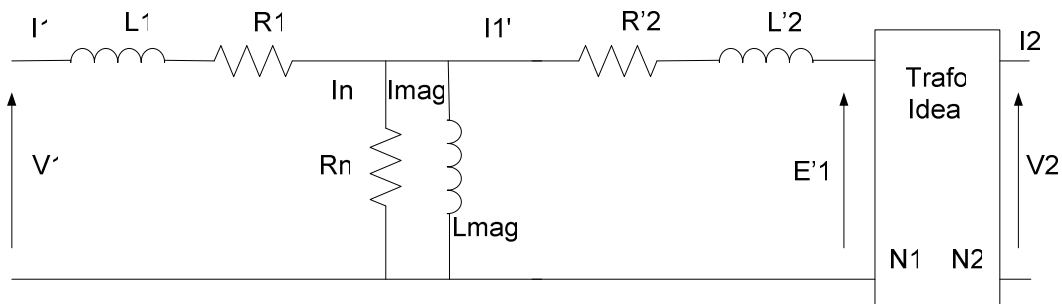


Figura 3.3: Circuito Equivalente do Transformador Modificado

Observe que a modificação do circuito não altera em nada a precisão do modelo. Não foi feita nenhuma simplificação para passar do modelo mostrado na figura 3.2 para o da figura 3.3.

Normalmente, podem ser feitas algumas simplificações no circuito equivalente. A indutância de magnetização representa a parcela da relação entre fluxo e corrente necessária para magnetizar o circuito magnético. Esta indutância é inversamente proporcional à relutância de magnetização. Da equação (14):

$$L_{mag} = \frac{\lambda_{mag}}{i_1} = \frac{N_1 \phi_{mag}}{i_1} = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{mag}} \quad (21)$$

Como (2):

$$\mathfrak{R}_{mag} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r A} \quad (22)$$

E a permeabilidade não é infinita mas é grande, a relutância de magnetização é pequena. Como consequência, a indutância de magnetização é grande. Em muitos problemas, esta indutância pode ser desprezada.

Da mesma forma, a resistência R_n , que representa as perdas no ferro, é muito maior que a reatância de magnetização. Quando não se quer analisar o rendimento do transformador, todo o ramo em paralelo pode ser desprezado. Observe que, se o transformador estiver em vazio esta consideração é inconsistente. Com o transformador em vazio ($I_2 = 0$) a corrente total é a chamada corrente de excitação composta pelas componentes de magnetização e corrente de perdas no núcleo.

Com estas considerações, o circuito equivalente pode ser bem simplificado. Agrupando as resistências e as reatâncias de dispersão em um único elemento:

$$\begin{aligned} R_{eq1} &= R_1 + R'_2 \\ X_{eq1} &= X_1 + X'_2 \end{aligned} \quad (23)$$

Tem-se:

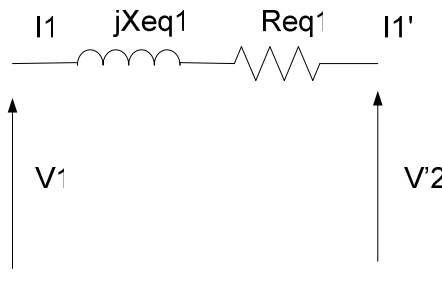


Figura 3.4: Circuito Equivalente Simplificado

Mesmo quando se deseja representar o ramo paralelo do circuito equivalente (como no caso do transformador em vazio) usa-se considerar a dispersão e a resistência dos dois enrolamentos em um único elemento. O circuito equivalente um pouco melhor seria o apresentado na figura 3.5.

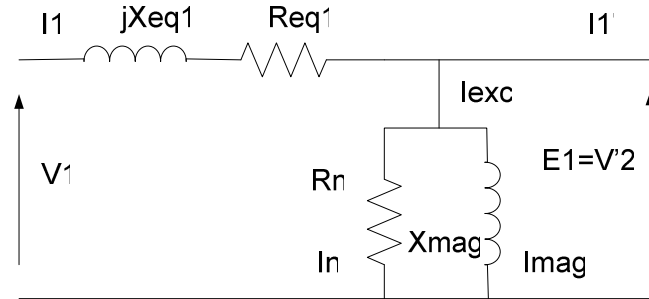


Figura 3.5: Representação usual do transformador

O circuito equivalente da figura 3.5 é bem mais simples que o da figura 3.3. Quando se conhece, por exemplo, a tensão da carga, refletindo esta tensão para o primário ($V'2$), obtém-se diretamente a corrente de perdas no núcleo (I_n) e a corrente de magnetização (I_{mag}). A soma (fasorial) destas duas correntes é chamada de corrente de excitação.

$$\bar{I}_{exc} = \bar{I}_{mag} + \bar{I}_n \quad (24)$$

4) Determinação dos Parâmetros do Circuito Equivalente

A determinação dos parâmetros do circuito equivalente é feita através de dois ensaios simples: o ensaio em circuito aberto (CA) e o ensaio em curto circuito (CC).

Ensaio CA

Aplica-se a tensão nominal em um dos terminais do transformador, abre-se o outro terminal ($I_2 = 0$) e se mede a tensão (V_{CA}), a corrente (I_{CA}) e a potência (P_{CA}).

Com estes três valores, considerando o circuito equivalente da figura 3.5 e desprezando-se a queda de tensão na impedância série, tem-se:

$$R_n = \frac{V_{CA}^2}{P_{CA}} \rightarrow G_n = \frac{1}{R_n} = \frac{P_{CA}}{V_{CA}^2} \quad (25)$$

$$Y_{exc} = \frac{I_{CA}}{V_{CA}} \quad (26)$$

$$B_{mag} = \sqrt{Y_{exc}^2 - G_n^2} \rightarrow X_{mag} = \frac{1}{B_{mag}} \quad (27)$$

Ensaio CC

Controlando a tensão de entrada, como o secundário curto-circuitado ($V_2 = 0$), ajusta-se a corrente ao seu valor nominal. Mede-se tensão (V_{CC}), corrente (I_{CC}) e potência (P_{CC}). Mais uma vez, usando a figura 3.5 e desprezando-se o ramo em paralelo (que está em curto) obtém-se:

$$Z_{eq} = \frac{V_{CC}}{I_{CC}} \quad (28)$$

$$R_{eq} = \frac{P_{CC}}{I_{CC}^2} \quad (29)$$

$$X_{eq} = \sqrt{Z_{eq}^2 - R_{eq}^2} \quad (30)$$

Observe que os valores das impedâncias em ohms são completamente diferentes no primário e no secundário. As impedâncias estarão referidas ao lado onde foram feitas as medidas.

Exemplo 1

Considere um transformador monofásico, de 10 kVA, 2200/220 V, 60 Hz, onde foram efetuados os ensaios de CA e de CC. Os resultados dos ensaios estão mostrados na tabela do exemplo 1. As medições do ensaio CA foram efetuadas no lado de baixa tensão (220 V) e as do ensaio CC no lado de alta tensão (2.220 V). Determinar o circuito equivalente deste transformador.

Tabela do exemplo 1

	CA	CC
Tensão (V)	220	150
Corrente (A)	2,5	4,55
Potência (W)	100	215
Medição	Baixa (220 V)	Alta (2200 V)

Solução

Aplicando-se, diretamente, as definições:

$$R_n = 484 \text{ ohms};$$

$$G_n = 2,1 \text{ m mhos};$$

$$Y_{exc} = 11,4 \text{ m mhos};$$

$$B_{mag} = 11,2 \text{ m mhos}; \text{ e}$$

$$X_{mag} = 89,49 \text{ ohms}.$$

Estes valores estão referidos ao lado de baixa tensão. Da mesma forma, para o ensaio CC:

$$R_{eq} = 10,38 \text{ ohms}$$

$$Z_{eq} = 32,96 \text{ ohms; e}$$

$$X_{eq} = 31,29 \text{ ohms.}$$

Referidos ao lado de alta.

Considerando que o primário é o lado de baixa tensão ($a = 1/10$), refletindo as impedâncias do secundário para o primário, obtém-se:

$$R_{eq1} = a^2 \cdot 10,38 = 0,104 \text{ ohms}$$

$$X_{eq1} = a^2 \cdot 31,29 = 0,313 \text{ ohms}$$

O circuito equivalente é mostrado na figura do exemplo 1.

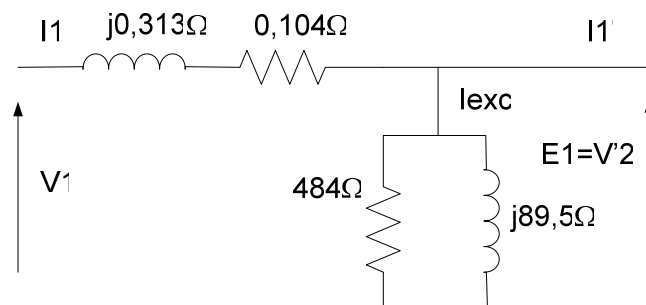


Figura do exemplo 1

Este circuito equivalente poderia também ser referenciado ao secundário. Para isto, seria necessário multiplicar os parâmetros obtidos neste exemplo por 100.

O local onde a impedância se refere pode causar confusão. Para evitar qualquer tipo de problema, os parâmetros dos transformadores são dados em valores por unidade ou em “pu”.

Para se obter os valores pu de um transformador é preciso definir um conjunto de bases coerentes. Para que as bases sejam coerentes, usa-se definir dois valores para cada lado do transformador e derivar as outras grandezas de base a partir destas duas.

Neste exemplo, vai-se usar como base a potência aparente nominal do transformador e as tensões nominais de cada enrolamento.

$$S_{B1} = S_{B2} = S_B = 10 \text{ kVA}$$

$$V_{B1} = 220 \text{ V}$$

$$V_{B2} = 2.200 \text{ V}$$

Então:

$$I_{B1} = \frac{S_B}{V_{B1}} = 45,45 \text{ A}$$

$$I_{B2} = \frac{S_B}{V_{B2}} = 4,54 \text{ A}$$

Dividindo-se os valores da tabela do exemplo 1 pelo valores de base que acabamos de definir tem-se:

Tabela em valores “pu” do exemplo 1

	CA	CC
Tensão (pu)	1,0	0,682
Corrente (pu)	0,055	1,0
Potência (pu)	0,01	0,0215

O cálculo das impedâncias em pu, evidentemente, segue as mesmas definições. Tem-se então:

$$Y_{exc} = 0,055 \text{ pu}$$

$$R_n = 100 \text{ pu}$$

$$G_n = 0,01 \text{ pu}$$

$$B_{mag} = 0,0541 \text{ pu}$$

$$X_{mag} = 18,49 \text{ pu}$$

Para o ensaio em CC:

$$Z_{eq} = 0,0682 \text{ pu}$$

$$R_{eq} = 0,215 \text{ pu}$$

$$X_{eq} = 0,0647 \text{ pu}$$

O novo circuito equivalente, além de muito mais simples, independe do lado que as impedâncias estão referidas. Esta constatação é óbvia uma vez que, da própria definição:

$$Z_{B1} = \frac{V_{B1}^2}{S_B} = 4,84 \text{ } \Omega$$

$$Z_{B2} = \frac{V_{B2}^2}{S_B} = 484 \text{ } \Omega$$

$$Z_{B1} = a^2 Z_{B2}$$

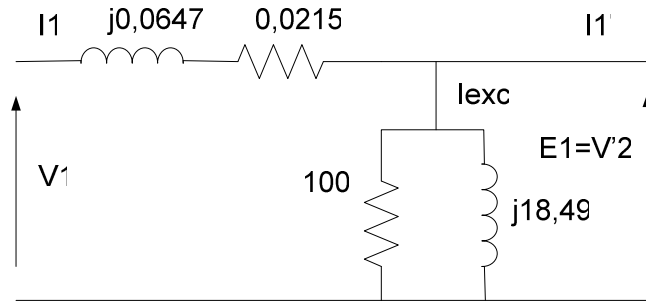


Figura em “pu” do exemplo 1

5) Regulação de Tensão

A regulação de tensão de um transformador retrata a variação da tensão terminal de um transformador quando submetido a uma determinada condição de carga.

Em vazio, desprezando-se a corrente de excitação, a tensão de entrada é igual a tensão de saída em valores “pu”.

$$V_2(NL) = \frac{V_1}{a} V \quad (31)$$

$$V_2(NL) = V_1 \text{ pu}$$

A queda de tensão no transformador depende da corrente de carga e da impedância série. Se a queda de tensão for muito grande é sinal que o transformador não é bom. Pode até prejudicar o comportamento da carga. Daí a importância desta característica do transformador chamada de “regulação de tensão” (RT).

Define-se RT como:

$$RT = \frac{|\bar{V}_2(NL)| - |\bar{V}_2(L)|}{|\bar{V}_2(L)|} \quad (32)$$

Onde as barras da equação 32 são para caracterizar que é o módulo do fasor de tensão e os termos nos parênteses dizem respeito a: *NL* (sem carga, ou *No Load*) e *L* (com carga).

Como o valor da regulação de tensão é um valor relativo (dividido pelo valor da tensão em carga) ele pode ser calculado no primário ou no secundário. A equação (32) é equivalente a:

$$RT = \frac{|\bar{V}'_2(NL)| - |\bar{V}'_2(L)|}{|\bar{V}'_2(L)|} \quad (33)$$

Onde V'_2 é a tensão secundária refletida ao primário. Em muitos problemas a tensão na carga é a tensão nominal. Então:

$$V'_2(L) = V_n = V_{ln} \quad (34)$$

$$RT = \frac{|\bar{V}'_2(NL)| - V_{ln}}{V_{ln}} \quad (35)$$

A tensão sem carga referida ao primário ($V'_2(NL)$) é igual à tensão primária (como foi visto em (31)). A expressão da regulação de tensão pode, então, ser simplificada para:

$$RT = \frac{V_1 - V_{ln}}{V_{ln}} \quad (36)$$

Em “pu” a expressão fica ainda mais simples:

$$RT = V_1(pu) - 1 \quad (37)$$

A equação (37) só vale supondo que a carga está sendo alimentada com tensão nominal.

Observe que a RT pode ser positiva ou negativa. Como a potência reativa flui do ponto de maior módulo de tensão para o de menor módulo, quando a carga é reativa a RT é positiva, quando a carga é capacitiva a RT pode ser negativa.

Exemplo 2

Calcular a Regulação de Tensão do transformador do exemplo anterior para duas condições de carga:

- a) 75% da carga nominal com fator de potência 0,6 indutivo.
- b) 75% da carga nominal com fator de potência 0,6 capacitivo.

Solução

Usando, inicialmente, os valores nas unidades do MKS, tem-se:

$$R_{eq1} = 0,104 \, \Omega$$

$$X_{eq1} = 0,313 \, \Omega$$

Desprezando-se os parâmetros em paralelo, para calcular a tensão de entrada basta conhecer a corrente. Supõe-se que a carga seja alimentada em tensão nominal. Então, referindo a tensão ao primário tem-se:

$$\bar{V}'_2 = 220 \angle 0^\circ \, V$$

A potência aparente da carga é igual a 75% da potência nominal do transformador.

$$\text{Carga} = 75\% \cdot 10 \, \text{kVA} = 7,5 \, \text{kVA}$$

O cálculo da corrente, então, é direto.

$$\bar{I}_1 = \bar{I}'_2 = \left(\frac{S}{V} \right)^* = \frac{7500}{220} \angle -\arccos(0,6) = 34,09 \angle -53,13 \text{ A}$$

$$\bar{V}_1 = 220 + (0,104 + j0,310)34,09 \angle -53,13 = 230,6 \angle 0,88$$

$$RT = \frac{V_1 - V_{1n}}{V_{1n}} = \frac{230,6 - 220}{220} = 4,82\%$$

b) Com a carga capacitiva:

$$\bar{I}_1 = 34,09 \angle +53,13 \text{ A}$$

$$\bar{V}_1 = 213,8 \angle 2,47 \text{ V}$$

$$RT = \frac{213,8 - 220}{220} = -2,82\%$$

Observe que a solução é muito mais simples em valores “pu”. Considerando apenas o caso indutivo, tem-se:

$$R_{eq} = 0,0215 \text{ pu}$$

$$X_{eq} = 0,0647 \text{ pu}$$

$$\bar{I}_1 = 0,75 \angle -53,13 \text{ pu}$$

$$\bar{V}_1 = 1 + (0,0215 + j0,0647).0,75 \angle -53,13 = 1,0486 \angle 0,88 \text{ pu}$$

RT = 4,86% (como calculado anteriormente).

6) Rendimento

O rendimento, por definição, é dado por:

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (38)$$

Os transformadores têm alto rendimento. Em alguns casos o rendimento pode chegar até a 99%. Não tendo partes rotativas, não existem perdas por atrito, fazendo com que o rendimento seja muito maior que o dos equipamentos de conversão eletromecânica de energia.

A diferença entre a potência de entrada (P_{in}) e a potência de saída (P_{out}) são as perdas.

$$P_{in} = P_{out} + \text{Perdas} \quad (39)$$

As perdas no transformador, como foi dito, podem ser divididas em perdas no cobre ($P(\text{cobre})$) e perdas no ferro ($P(\text{ferro})$).

As perdas no cobre são proporcionais ao quadrado da corrente de carga.

$$P(\text{cobre}) = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 \quad (40)$$

Quando se usa o circuito equivalente aproximado da figura 3.5, o cálculo das perdas no cobre é obtido através de:

$$P(\text{cobre}) = R_{eq1} I_1^2 \quad (41)$$

Se o circuito equivalente estiver referenciado ao secundário:

$$P(\text{cobre}) = R_{eq2} I_2^2 \quad (42)$$

Em valores por unidade, tanto a resistência quanto a corrente são as mesma, portanto as equações (41) e (42) ficam idênticas em “pu”.

As perdas no núcleo independem da corrente de carga. O transformador, mesmo sem carga, estando ligado à rede, tem estas perdas proporcionais ao quadrado da tensão.

$$P(\text{núcleo}) = \frac{E_1^2}{R_n} \quad (43)$$

Observe que, se o ensaio de circuito aberto for efetuado com a tensão nominal, as perdas do núcleo (operando em condições nominais) serão iguais a P_{CA} .

Com as definições das perdas, é possível reescrever a equação do rendimento em função dos dados do transformador. Note que a potência ativa de saída (P_{out}) é dada por:

$$P_{out} = V_2 I_2 \cos \phi \quad (44)$$

Onde ϕ é o ângulo de defasagem entre tensão e corrente, ou, o coseno de ϕ é o fator de potência da carga.

Note também que, como potência ativa é uma grandeza real, os valores usados nas definições de 40 a 44 são os módulos dos fasores de tensão e corrente.

O rendimento, então, é dado por:

$$\eta = \frac{V_2 I_2 \cos \phi}{V_2 I_2 \cos \phi + P_{CA} + R_{eq2} I_2^2} \quad (45)$$

Observa-se em (45) que o rendimento é uma função de duas variáveis: a corrente de carga (I_2) e o fator de potência.

O ponto de máximo rendimento em função da corrente de carga ocorre quando:

$$\frac{\partial \eta}{\partial I_2} = 0 \quad (46)$$

Efetuada a operação, tem-se:

$$P_{CA} = R_{eq2} I_2^2 \quad (47)$$

Fazendo o mesmo procedimento da o fator de potência obtém-se:

$$\cos \phi = 1 \quad (48)$$

Eficiência Energética do Transformador

O ciclo de carga de um transformador depende da sua utilização. Os grandes transformadores ligados aos sistemas de geração operam próximo da sua carga nominal ao longo da sua vida útil. Os transformadores de distribuição acompanham a carga residencial ou comercial. Operam, portanto, na maior parte do tempo, abaixo da sua capacidade nominal.

Dependendo da aplicação, o transformador deve ser construído tentando minimizar as perdas no ferro ou as perdas no cobre. Para avaliar a influência das diferentes perdas do transformador define-se a eficiência energética (ou rendimento diário):

$$\eta_E = \frac{\text{Energia de saída (24h)}}{\text{Energia de entrada (24h)}} \quad (49)$$

Para determinar a eficiência do transformador é preciso conhecer o seu ciclo de carga. Os exemplos, a seguir, vão mostrar a forma de cálculo.

Exemplo 3

Calcule o rendimento do exemplo anterior na condição de carga definida pela letra “a”.

Solução

$$P_{out} = V'_2 I'_2 \cos \phi$$

$$P_{out} = 4.488 \text{ W}$$

$$P_{in} = V_1 I_1 \cos \phi_1 = P_{out} + P_{CA} + P(\text{cobre})$$

$$P_{CA} = 100 \text{ W}$$

$$P(\text{cobre}) = 0,104 \cdot 34^2 = 120 \text{ W}$$

$$\eta = 95,3\%$$

O problema também pode ser resolvido em “pu”.

$$P_{out} = 1 \cdot 0,75 \cdot \cos(53,13) = 0,45 \text{ pu}$$

$$P(\text{cobre}) = 0,75^2 \cdot 0,0215 = 0,0121 \text{ pu}$$

$$P(\text{núcleo}) = P_{CA} = 0,01 \text{ pu}$$

$$\eta = 95,3\%$$

Exemplo 4

Um trafo de 100 kVA, 4.400/380 V, 60 Hz, tem perdas no núcleo iguais a 1.200 W e perdas no cobre iguais a 1.000 W quando opera em plena carga. O ciclo de carga do transformador é dado pela tabela do exemplo 4. Calcule a eficiência energética do transformador.

Tabela do Exemplo 4

Carga	0%	50%	80%	100%	110%
Fator de Potência	-	1	0,8 (ind)	0,9 (ind)	1
Horas	10	5	5	2	2

Solução

A energia de saída será calculada em pu tendo como base a potência nominal do transformador.

$$E(\text{out}) = 0,5 \cdot 1 \cdot 5 + 0,8 \cdot 0,8 \cdot 5 + 1 \cdot 0,9 \cdot 2 + 1,1 \cdot 1 \cdot 2 = 9,8 \text{ pu.horas}$$

Note que a potência ativa de saída é o produto da potência aparente (ou carga) que já está em pu na tabela multiplicada pelo fator de potência. A energia é a integral da potência ativa ao longo do tempo.

Para calcular a energia de entrada (E(in)), basta multiplicar as perdas pelo número de horas.

$$P(\text{cobre}) = R \cdot I^2 = 0,01 \text{ pu}$$

$$P(\text{núcleo}) = 0,012 \text{ pu}$$

$$E(\text{perdas}) = 0,01 (0,5^2 \cdot 5 + 0,8^2 \cdot 5 + 1^2 \cdot 2 + 1,1^2 \cdot 2) + 0,012 \cdot 24 = 0,3767 \text{ pu horas}$$

$$\eta_E = \frac{9,8}{9,8 + 0,3767} = 96,3\%$$

7) Autotransformador

No transformador normal, cada enrolamento é projetado para suportar a potência nominal. É possível ligar os enrolamentos de forma a melhor aproveitar o material utilizado. Este equipamento é chamado de “autotransformador”.

O secundário de um autotransformador (ou o seu lado de baixa tensão) é tirado de uma derivação do enrolamento principal (ou primário). A figura 7.1 mostra um desenho esquemático de um autotransformador.

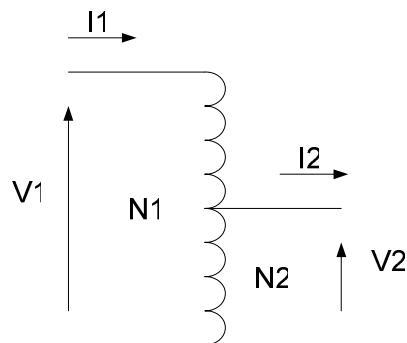


Figura 7.1: Autotransformador

Pode-se analisar o autotransformador com se fosse um transformador de dois enrolamentos. O enrolamento 1 com N_1 espiras e o enrolamento 2 com uma parcela das espiras do enrolamento 1, ou N_2 espiras com $N_2 < N_1$.

O fluxo concatenado sendo o mesmo, tem-se:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = a \quad (50)$$

O equilíbrio ampère-espira também tem que ser obedecido:

$$\begin{aligned} (N_1 - N_2)I_1 &= N_2(I_2 - I_1) \\ N_1I_1 &= N_2I_2 \\ \frac{I_1}{I_2} &= \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{a} \end{aligned} \quad (51)$$

Visto dos terminais, portanto, o autotransformador se comporta como se fosse um transformador de dois enrolamentos com relação de transformação “a”.

A vantagem do autotransformador é a capacidade, ou potência nominal, que é muito maior que o transformador normal. O exemplo a seguir ilustra esta característica.

Exemplo 5

Considere um transformador de dois enrolamentos de 100 kVA, 2.000/200 V, conectado como um autotransformador. Qual a potência nominal da nova conexão?

Solução

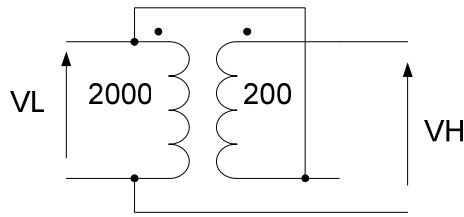


Figura do Exemplo 5

A corrente nominal do lado de baixa tensão (VL) é dada por:

$$I_{Ln} = \frac{S_n}{V_{Ln}} = 50 \text{ A}$$

A corrente nominal nas espiras de 200 V do transformador é:

$$I_{2n} = \frac{S_n}{V_{Ln}} = 500 \text{ A}$$

Em plena carga o lado de alta tensão ($V_H = 2.200 \text{ V}$) suporta uma corrente de 500 A. Então, a potência aparente do transformador de dois enrolamentos ligado como um autotransformador será:

$$S_H = 2.200 \cdot 500 = 1.100 \text{ kVA}$$

Onze vezes superior à potência aparente do transformador de dois enrolamentos. Olhando a distribuição da corrente, observa-se que a potência aparente do lado de baixa, como não podia deixar de ser, também é igual a 1.100 kVA.

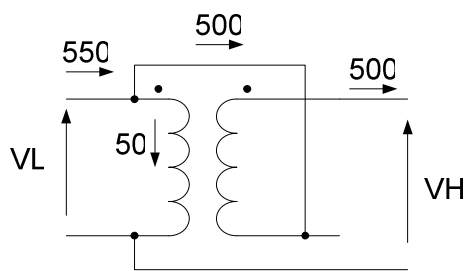


Figura das correntes do exemplo 5

$$S_L = 2.000 \cdot 550 = 1.100 \text{ kVA}$$

De uma forma geral, colocando as duas bobinas (“1” e “2”) em série tem-se:

$$S_1 = V_1 I_1 = V_2 I_2 = S_2$$

$$S_L = V_L I_L = V_1 (I_1 + I_2)$$

$$S_H = V_H I_H = (V_1 + V_2) I_2$$

$$\frac{S_L}{S_1} = \frac{V_1(I_1 + I_2)}{V_1 I_1} = 1 + \frac{I_2}{I_1}$$

Neste exemplo, $I_2 = 500$ A e $I_1 = 50$ A, então:

$$S_L = 11 \cdot S_1$$

É evidente que o enrolamento “2” tem que ser isolado para uma tensão igual a soma das tensões V_1 e V_2 . De qualquer forma, é muito mais econômico usar autotransformadores. Para grandes potências, normalmente, são usados autotransformadores.

8) Transformadores Trifásicos

O transformador trifásico é, basicamente, a conexão de três transformadores monofásicos. Em algumas aplicações é usado apenas um circuito magnético. Em outras, o transformador trifásico é composto por três transformadores monofásicos separados.

É importante entender como são feitas as conexões dos transformadores. Elas podem ser de quatro tipos diferentes: $\Delta\Delta$, YY , $Y\Delta$ ou ΔY .

Conexão $Y\Delta$

A figura 8.1 mostra a conexão de três transformadores monofásicos com o primário em estrela (Y) e o secundário em delta (Δ).

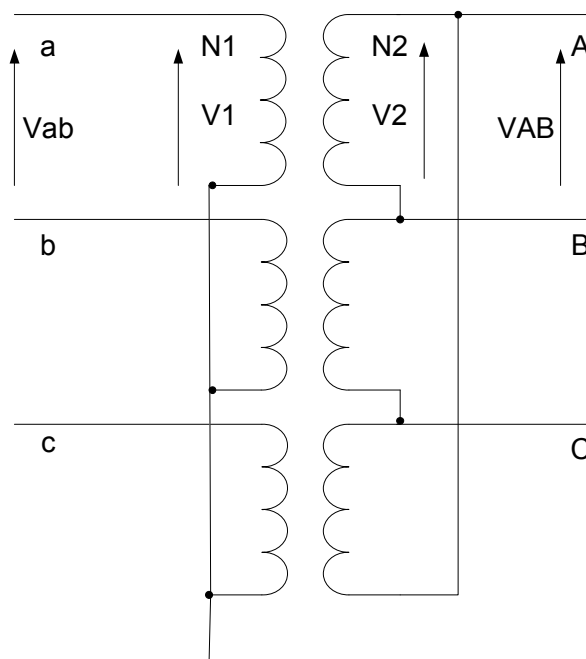


Figura 8.1: Conexão $Y\Delta$

Observe que a relação de transformação do transformador trifásico (com esta conexão) é diferente da relação entre o número de espiras ($a = N_1/N_2$). De fato:

$$\frac{V_{ab}}{V_{AB}} = \frac{\sqrt{3}V_1}{V_2} = \sqrt{3} \frac{N_1}{N_2} = \sqrt{3}a$$

Da mesma forma, traçando o diagrama fasorial das tensões, observa-se que existe uma defasagem entre a tensão de linha de entrada e a tensão de linha da saída.

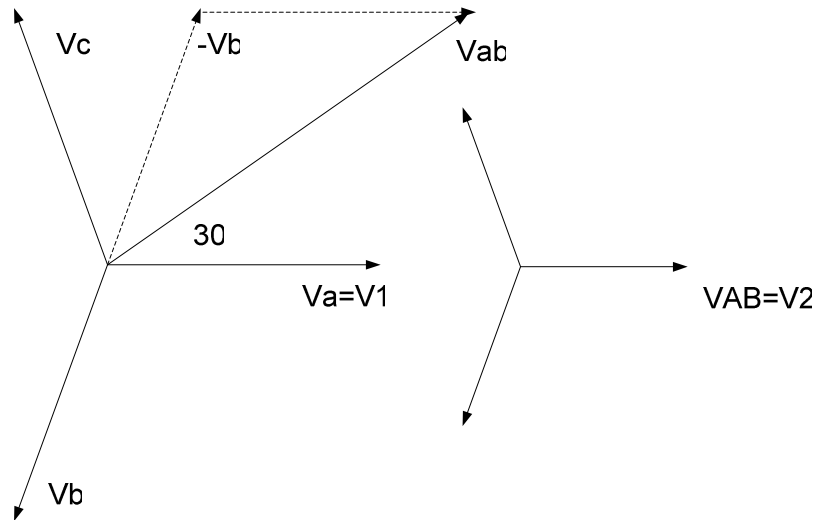


Figura 8.2: Diagrama fasorial das tensões de uma conexão YΔ

Observa-se que a tensão no secundário (em delta) está atrasada em relação à tensão de linha do primário de 30° .

Exemplo 6

Determinar a defasagem das tensões de linha de um transformador trifásico conectado em delta no primário e em estrela no secundário

Solução

A conexão está mostrada na figura do exemplo 6.

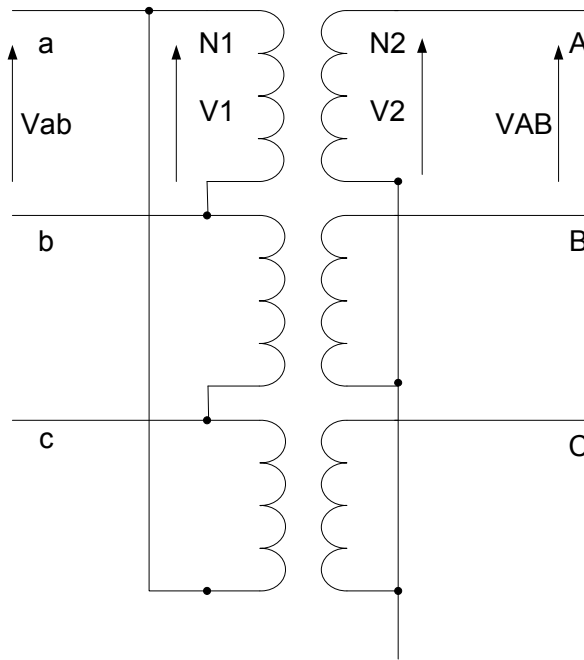


Figura do exemplo 6: Conexão delta-estrela

Nesta conexão:

$$\bar{V}_{ab} = \bar{V}_1$$

$$\bar{V}_{AB} = \bar{V}_A - \bar{V}_B$$

$$\bar{V}_A = \bar{V}_2 = \frac{\bar{V}_1}{a}$$

Fazendo um diagrama fasorial semelhante ao da figura 8.2, obtém-se:

$$\bar{V}_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{a} \bar{V}_{ab} \angle +30^\circ$$

Os transformadores com conexão delta-delta ou estrela-estrela não apresentam defasagens entre a tensão de linha de entrada e a tensão de linha de saída.

Para toda ligação delta-estrela ou estrela-delta, por norma, a alta tensão estará adiantada de 30° em relação à baixa.

As conexões em estrela são interessantes pela possibilidade de aterramento de um dos terminais. A alta tensão dos transformadores, normalmente, é conectada em estrela.

As conexões em delta são interessantes por que servem como caminho de baixa impedância para correntes de sequência zero. Em alguns casos, onde o primário e o secundário estão conectados em estrela, coloca-se um terceiro enrolamento em delta para filtrar as correntes de sequência zero. Esta propriedade vai ser analisada nos transformadores de três enrolamentos.

A análise de circuitos trifásicos é feita, normalmente, por fase. Quando se tem uma carga em delta, deve-se transformá-la em estrela para fazer a análise por fase. A impedância equivalente em estrela é um terço da impedância da carga em delta.

Exemplo 7

Considere três transformadores monofásicos de 50 kVA, 2300/230 V, 60 Hz, conectados de forma a produzir um banco trifásico de 4.000/230 V. A impedância equivalente do transformador monofásico, referida ao lado de baixa tensão é igual a $0,012 + j 0,016 \Omega$. Este transformador alimenta uma carga de 120 kVA, 230 V, com fator de potência igual a 0,85 indutivo. Qual a tensão de entrada? Qual a regulação de tensão nesta condição de carga?

Solução

Para se obter uma tensão de linha na entrada de 4.000 V, é preciso que o transformador seja conectado em estrela (primário) e delta (secundário).

O cálculo da corrente de linha independe da forma de ligação da carga.

$$\bar{I}_L = \left(\frac{S}{\sqrt{3}V} \right)^* = \frac{120.000}{\sqrt{3}230} \angle -\arccos(0,85) = 301,24 \angle -31^\circ \text{ A}$$

Lembrando que a potência aparente de uma carga trifásica é a potência trifásica e a tensão nominal é a tensão de linha. Como o secundário está conectado em delta, a corrente que passa na bobina do transformador (I_{2a}) é diferente da corrente de linha (ou de carga).

$$\bar{I}_{2a} = \frac{\bar{I}_L}{\sqrt{3}} \angle +30^\circ = 174 \angle -1^\circ \text{ A}$$

A relação de transformação, neste exemplo, é igual à relação entre as tensões primária e secundária do transformador monofásico ($a = N_1/N_2 = 10$). Então:

$$\bar{I}_{1a} = 17,4 \angle -1^\circ \text{ A}$$

A impedância equivalente do transformador foi dada no lado de baixa tensão (ligado em delta). Para refletir para o lado de alta (ligado em estrela) basta multiplicar pelo quadrado da relação de transformação ($a^2 = 100$).

$$Z_{eq1} = 100.(0,012 + j0,016) = 1,2 + j1,6 \Omega$$

A tensão (fase-neutro) do primário do transformador é, então, dada por:

$$\bar{V}_1 = \bar{V}'_2 + Z_{eq1} \bar{I}_{1a}$$

Tomando V_2 como referência fasorial (230 V com fase zero), a tensão V'_2 , refletida para o primário será:

$$\bar{V}'_2 = 2.300 \angle 0$$

Então:

$$\bar{V}_1 = 2.332,4 \angle 0,31^\circ \text{ V}$$

A regulação de tensão (RT) deste transformador, nesta condição de carga é dada por:

$$RT = \frac{2.332,4 - 2.300}{2.300} = 1,41\%$$

A solução deste problema em valores reais (MKS) apresenta várias dificuldades desnecessárias. O cálculo em “pu”, com grandezas de base escolhidas de forma a simplificar o problema, faz com que o problema fique muito mais simples.

A base de potência aparente, que deve ser a mesma para os dois enrolamentos do transformador, pode ser a potência trifásica nominal do trafo.

$$S_B(3\phi) = 150 \text{ kVA}$$

Se a potência de base trifásica foi escolhida, a monofásica é uma consequência:

$$S_B(1\phi) = \frac{S_B(3\phi)}{3} = 50 \text{ kVA}$$

Escolhendo a tensão de linha como base para cada um dos enrolamentos, a tensão de fase também será uma consequência.

$$V_{B1} = 4.000 \text{ V}$$

$$V_{B2} = 230 \text{ V}$$

$$V_{B1}(\text{fase} - \text{neutro}) = \frac{V_{B1}}{\sqrt{3}} = 2.300 \text{ V}$$

$$V_{B2}(\text{fase} - \text{neutro}) = \frac{V_{B2}}{\sqrt{3}} = 132,8 \text{ V}$$

A corrente e a impedância de base (de cada lado) também ficam definidas.

$$Z_{B1} = \frac{V_{B1}^2}{S_B} = \frac{V_{B1}^2(\text{fase} - \text{neutro})}{S_B(1\phi)} = 105,8 \Omega$$

$$I_{B1} = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_{B1}} = 21,65 \text{ A}$$

Impedância e corrente de base também podem ser calculadas para o secundário. Neste problema, elas não são necessárias.

O valor da impedância em pu no primário (ou no secundário já que têm o mesmo valor numérico) será:

$$Z_{eq1} = Z_{eq2} = Z_{eq} = \frac{1,2 + j1,6}{105,8} = 0,0113 + j0,0151 \text{ pu}$$

$$\bar{I}_1(\text{pu}) = \bar{I}_2(\text{pu}) = \frac{120}{150} \angle -\arccos(0,85) = 0,8 \angle -31,78 \text{ pu}$$

$$\bar{V}_1 = 1 + (0,0113 + j0,0151) \cdot 0,8 \angle -31,78$$

$$\bar{V}_1 = 1,0141 \angle +0,311 \text{ pu}$$

$$RT = 1,41\%$$

É sempre muito mais simples a resolução em pu. Outros exemplos vão evidenciar esta opção.

Exemplo 8

Uma carga trifásica de 230 V, 27 kVA, $\text{fp} = 0,9$ (indutivo) é alimentada por três transformadores monofásicos de 10 kVA, 1.330/230 V, conectado em Y Δ , cuja impedância (em ohms) no lado de baixa é igual a $0,12 + j 0,25 \Omega$. Entre o transformador e a carga existe um alimentador cuja impedância por fase é igual a $0,003 + j 0,015 \Omega$. Entre a fonte e o transformador tem outro alimentador cuja impedância é igual a $0,8 + j5 \Omega$. Se a tensão na carga é a tensão nominal, qual o valor da tensão na fonte?

Solução

A figura do exemplo 8 mostra o circuito equivalente trifásico do problema.

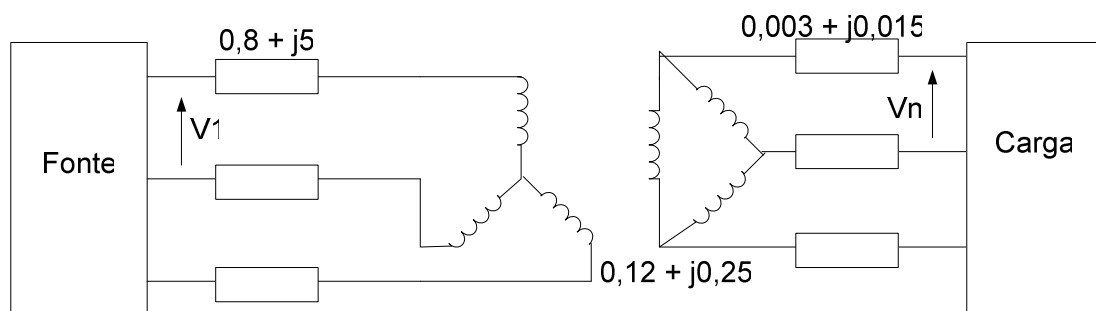


Figura do Exemplo 8.

A impedância do transformador monofásico é dada em ohms no lado de baixa tensão. Para colocá-la em “pu” pode-se dividir a impedância pela base do secundário, lembrando que o secundário está em delta ou refletir a impedância para o primário e dividir pela base do primário. As duas formas têm que dar o mesmo resultado.

Usando:

$$S_B = 30 \text{ kVA}$$

$$S_B(1\phi) = 10 \text{ kVA}$$

$$V_{B1} = 2.300 \text{ V}$$

$$V_{B2} = 230 \text{ V}$$

$$Z_{B1} = 176,33 \Omega$$

$$Z_{B2} = 1,76 \Omega$$

Calculando a impedância do secundário:

$$Z_{eq2} = \frac{0,12 + j0,25}{1,76} = 0,0681 + j0,1418 \text{ pu}$$

Esta impedância do secundário, que está ligado em delta, para ser colocada em um circuito por fase, tem que ser transformada em estrela, ou seja, a impedância equivalente deve ser dividida por três.

$$Z_{eq} = \frac{0,0681 + j0,1418}{3} = 0,0227 + j0,0473 \text{ pu}$$

A outra forma de se obter a mesma impedância é refletir ao lado de alta (que está em estrela) e transformar para “pu”.

$$Z_{eq1} = a^2 Z_{eq2} = \left(\frac{1.330}{230}\right)^2 \cdot (0,12 + j0,25) = 4,0126 + j8,3596 \Omega$$

Portanto:

$$Z_{eq} = \frac{4,0126 + j8,3596}{176,33} = 0,0227 + j0,0473 \text{ pu}$$

É preciso, também, colocar as impedâncias dos alimentadores em pu.

$$Z_{fonte} = \frac{0,8 + j5}{176,33} = 0,045 + j0,0283 \text{ pu}$$

$$Z_{a\lim} = \frac{0,003 + j0,015}{1,76} = 0,0017 + j0,0085 \text{ pu}$$

A impedância total do circuito em pu é igual a:

$$Z_{total} = Z_{eq} + Z_{fonte} + Z_{a\lim} = 0,0289 + j0,0841 \text{ pu}$$

Conhecendo a corrente:

$$\bar{I} = 0,9 \angle -25 \text{ pu}$$

O cálculo da tensão da fonte é direto.

$$\bar{V}_1 = 1 + (0,0289 + j0,0841) \cdot 0,9 \angle -25$$

$$\bar{V}_1 = 1,0579 \angle +3,077 \text{ pu}$$

O módulo da tensão de linha na fonte é igual a 2.433 V.

9) Transformador de três enrolamentos

Em um determinado acoplamento magnético podem ter mais do que dois enrolamentos. A lei de Faraday e o equilíbrio ampère-espira tem que valer qualquer número de enrolamentos acoplados. O caso de três enrolamentos acoplados é o mais comum e a extensão para “n” enrolamentos é simples.

Considerando, então, os enrolamentos 1, 2 e 3 com N_1 , N_2 e N_3 espiras, tem-se:

$$\frac{V_1}{N_1} = \frac{V_2}{N_2} = \frac{V_3}{N_3} \quad (52)$$

$$N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3 = 0 \quad (53)$$

Todas as considerações feitas para se determinar o circuito equivalente do transformador de dois enrolamentos valem também para o de três. Basicamente, cada enrolamento pode ser representado pela sua resistência em série com a reatância de dispersão. Além disto, a impedância de magnetização, representa a necessidade de uma corrente diferente de zero para magnetizar o material e representa as perdas no núcleo. A figura 9.1 mostra o circuito equivalente do transformador de três enrolamentos.

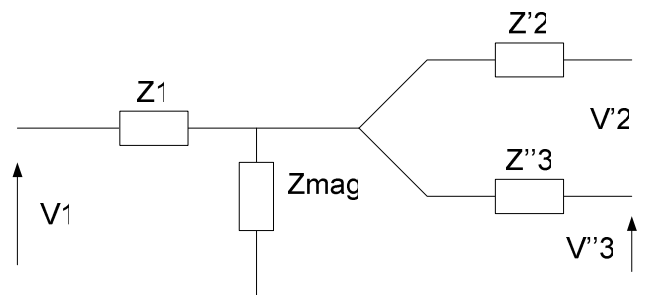


Figura 9.1: Circuito equivalente do transformador de três enrolamentos

Onde

$$Z'_2 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_2$$

$$Z''_3 = \left(\frac{N_1}{N_3}\right)^2 Z_3$$
(54)

Ou, as impedâncias reais dos enrolamentos refletidas ao primário. Quando as impedâncias são calculadas em “pu” o enrolamento que elas estão refletidas perde o sentido por que o valor numérico é idêntico. Pode-se dizer que o circuito equivalente da figura 9.1 é o circuito em “pu” do transformador de três enrolamentos.

Determinação dos parâmetros

Para determinar os parâmetros do circuito equivalente, procede-se da mesma forma que para o transformador de dois enrolamentos. Faz-se um ensaio em circuito aberto (CA) e três ensaios em curto-circuito (CC).

O ensaio em circuito aberto é idêntico.

Os ensaios em CC são parecidos. Aplica-se uma tensão (menor que a nominal) no enrolamento “1”, deixa-se em curto o enrolamento “2” e o enrolamento “3” em aberto. De acordo com a figura 9.1, com esta configuração, a impedância medida será:

$$Z_{12} = Z_1 + Z'_2$$
(54)

Repete-se o procedimento deixando o enrolamento “2” em aberto e deixando em curto o enrolamento “3”. Mede-se, então:

$$Z_{13} = Z_1 + Z''_3$$
(55)

Finalmente, deixando o enrolamento “1” em aberto, aplica-se uma tensão em “2” com “3” em curto. O valor medido será:

$$Z_{23} = Z'_2 + Z''_3$$
(56)

Considera-se que todas as impedâncias estão em “pu”.

Assim, os valores do circuito equivalente da figura 9.1 podem ser obtidos da combinação das três equações anteriores.

$$Z_1 = \frac{Z_{12} + Z_{13} - Z_{23}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{Z_{12} + Z_{23} - Z_{13}}{2}$$

$$Z_3 = \frac{Z_{23} + Z_{13} - Z_{12}}{2}$$
(57)

O cálculo destas impedâncias fica mais simples em um exemplo.

Exemplo 9

Foram feitos os ensaios em curto-circuito em um transformador trifásico de três enrolamentos de 18/ 230/ 4,16 kV, com potência de 120/ 100/ 30 MVA, ligados em Y, Y, Δ e os resultados estão mostrados na tabela do exemplo 9.

Tabela do exemplo 9: Ensaio em CC

		TENSÃO		POTÊNCIA
ENSAIO		FASE	CORRENTE	MONO
MEDIDA	CURTO	V	A	W
1	2	744	3207	500000
2	3	2331	75,3	60000
3	1	63,8	4167	75000

Solução

O primeiro passo é definir as bases para transformar todos os dados em “pu”.

$$S_B = 100 \text{ MVA}$$

$$V_{1B} = 18 \text{ kV}$$

$$V_{2B} = 230 \text{ kV}$$

$$V_{3B} = 4,16 \text{ kV}$$

Com esta escolha, obtém-se:

$$I_{1B} = 3,2 \text{ kA}$$

$$I_{2B} = 0,251 \text{ kA}$$

$$I_{3B} = 13,87 \text{ kA}$$

$$Z_{1B} = 3,23 \Omega$$

$$Z_{2B} = 529 \Omega$$

$$Z_{3B} = 0,0729 \Omega$$

Transformando a tabela em valores em “pu” tem-se:

ENSAIO TRANSFORMADO PARA pu				
		V(pu)	I(pu)	P(pu)
1	2	0,0716	0,9998	0,0150
2	3	0,0176	0,3000	0,0018
3	1	0,0266	0,3002	0,0023

Portanto:

$$R_{12} = 0,015 \text{ pu}$$

$$R_{23} = 0,020 \text{ pu}$$

$$R_{31} = 0,0256 \text{ pu}$$

$$Z_{12} = 0,0716 \text{ pu}$$

$$Z_{23} = 0,0585 \text{ pu}$$

$$Z_{31} = 0,0887 \text{ pu}$$

$$X_{12} = 0,070 \text{ pu}$$

$$X_{23} = 0,0552 \text{ pu}$$

$$X_{31} = 0,0849 \text{ pu}$$

Finalmente,

$$Z_1 = 0,010 + j 0,050 \text{ pu}$$

$$Z_2 = 0,005 + j 0,020 \text{ pu}$$

$$Z_3 = 0,015 + j 0,035 \text{ pu}$$

10) Harmônicos e Seqüência Zero em Transformadores

A tensão induzida nos terminais de uma bobina é proporcional ao fluxo, à frequência e ao número de espiras. Como já foi visto, pode-se obter a seguinte expressão para tensão:

$$V = 4,44 N \phi f \quad (58)$$

Evidentemente, a tensão é proporcional à densidade de fluxo multiplicada pela área média do núcleo (A_n).

$$\frac{V}{N} = 4,44 f . B . A_n \quad (59)$$

A corrente total nos enrolamentos primário ou secundário é proporcional à densidade de corrente (J) e à área da janela (A_w) disponível do transformador.

$$NI = JK_w A_w \quad (60)$$

Onde K_w é a proporção da área da janela usada para condução de corrente.

É fácil observar que a potência do transformador está diretamente relacionada com o seu tamanho físico, ou seja, às áreas do núcleo e da janela.

$$S = VI = 4,44 fJBK_w A_n A_w \quad (61)$$

Para maximizar o aproveitamento do material ferro-magnético, é interessante operar com densidades de fluxo (B) e de corrente (J) elevadas. A limitação da densidade de corrente está ligada à refrigeração do equipamento. A limitação da densidade de fluxo está ligada à saturação do material magnético.

Normalmente, projeta-se o transformador para operar no joelho da curva de magnetização. A característica não-linear da curva de magnetização faz com que a corrente de excitação tenha uma forte componente de terceiro harmônico. Uma característica importante das componentes de terceiro harmônico (e de seus múltiplos) é estarem em fase. A análise do comportamento do transformador trifásico quando submetido a perturbações de terceiro harmônico é parecida com a sua análise para a seqüência zero.

Observe o transformador trifásico, ligado em $Y\Delta$, da figura 10.1. Suponha que o primário seja alimentado por uma fonte de correntes de seqüência zero. A análise do equilíbrio ampère-espira nas bobinas do transformador mostra que, se os enrolamentos em estrela estiverem aterrados, a corrente circula pelo transformador mas não se propaga pelo sistema.

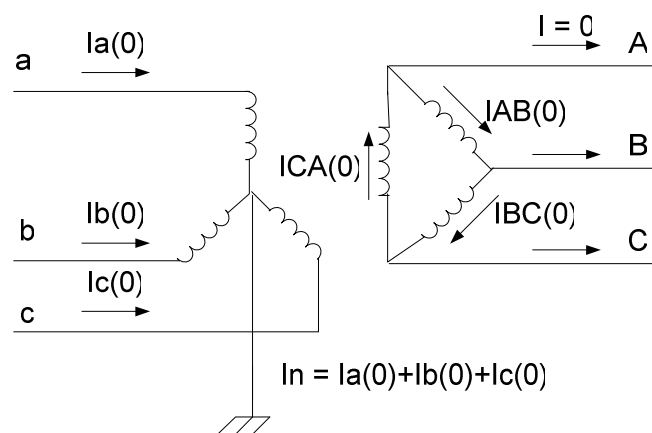


Figura 10.1: Correntes de seqüência zero em um transformador $Y\Delta$

Essa característica é tão importante que, em alguns transformadores onde o primário e o secundário são de alta tensão, portanto são preferencialmente ligados em estrela aterrado, usa-se colocar um terceiro enrolamento (para serviços auxiliares) ligado em delta para servir de caminho de baixa impedância para as correntes de seqüência zero ou para as harmônicas de ordem três.

A análise de transformadores em situação de desequilíbrio, como num curto-circuito monofásico, por exemplo, a representação do transformador tem que ser feita para as seqüências positiva, negativa e zero. A representação para seqüência positiva e negativa (idêntica ao regime permanente) foi mostrada nos itens anteriores. Para a seqüência zero é preciso considerar o tipo de ligação do transformador. A figura 10.2 mostra esquematicamente a representação do transformador de três enrolamentos para a seqüência zero. Quando a ligação do primário é em estrela não aterrado os terminais (1 1') ficam aberto. Quando a ligação é estrela aterrada coloca-se uma impedância igual a 3 vezes a impedância de aterramento entre os mesmos terminais e quando o enrolamento está em delta faz-se a ligação para a terra.

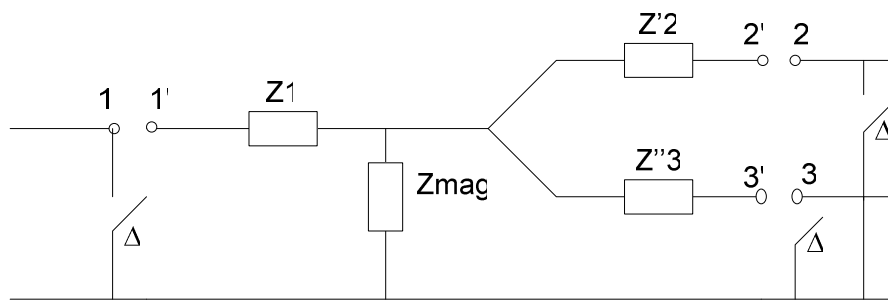


Figura 10.2: Esquema de ligação para seqüência zero do transformador de três enrolamentos

13) Referências Bibliográficas

- [1] SEN, P.C. "Principles of Electric Machines and Power Electronics", New York, John Wiley and Sons, 1996.
- [2] MATSCH, L. W., MORGAN, J. D., "Electromagnetic and Electromechanical Machines", Harper and Row, NY, 1986.
- [3] FITZGERALD, A. E., KINSLEY, C., KUSKO, A., "Máquinas Elétrica", McGraw Hill, São Paulo, 1979.
- [4] DEL TORO, V., "Fundamentos de Máquinas Elétricas", Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1994.
- [5] NASAR, S. A., "Electric Machines and Transformers", Macmillan, NY, 1984.
- [6] NASAR, S. A., "Máquinas Elétricas", Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1984.
- [7] SLEMON, G. R., "Equipamentos Magnetelétricos", Livros Técnicos e Científicos, São Paulo, 1974.

CONVERSÃO ELETROMECAÂNICA DE ENERGIA

Ivan Camargo

Revisão 1 (maio de 2007)

Para análise de um conversor, é fundamental o conhecimento da força eletromagnética desenvolvida pelo conversor. Existem diversas formas de cálculo desta força (ou conjugado), uma das formas mais interessantes é a baseada nos princípios de conservação de energia.

1) Princípios da Conservação da Energia

Em todo sistema, a energia de entrada tem que ser igual a energia que sai adicionada às perdas e ao que foi armazenado. Esquemáticamente, tem-se:

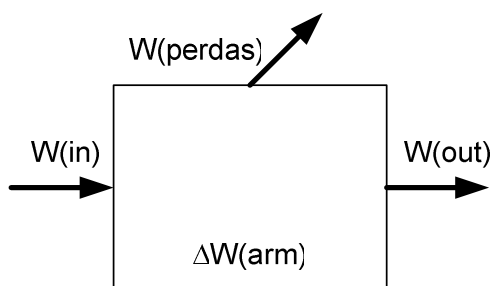


Figura 1.1: Princípio da conservação da energia

Matematicamente:

$$W_{in} = W_{out} + W_{perdas} + W_{arm} \quad (1)$$

Em um conversor eletromecânico de energia, pode-se decompor o grande sistema em três subsistemas: elétrico, do campo de acoplamento e mecânico. Em cada um deles o princípio de conservação tem que valer.

Mais uma vez, esquematicamente, tem-se:

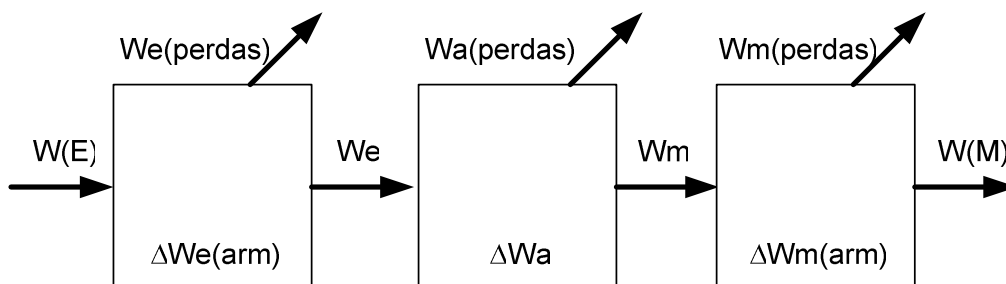


Figura 1.2: Conservação de energia em um conversor eletromecânico

Para cada um dos sistemas a energia tem que se conservar. Para o sistema elétrico tem-se:

$$W_E = W_e + W_e(perdas) + W_e(arm) \quad (2)$$

Para o sistema mecânico, tem-se:

$$W_m = W_M + W_m(perdas) + W_m(arm) \quad (3)$$

Finalmente, para o campo de acoplamento:

$$W_e = W_m + W_a + W_a(perdas) \quad (4)$$

A identificação de cada um dos termos é dada pelo esquema da figura 1.2.

As perdas do campo de acoplamento, que sempre ocorrem, podem ser representadas como parte das perdas elétricas (ou parte das perdas mecânicas). De fato, como foi feito no circuito equivalente do transformador, as perdas por corrente de Foucault e por histeresis foram representadas por uma resistência equivalente (R_n), a resistência de perdas no núcleo. Fazendo esta consideração o sistema de acoplamento passa a ser um “sistema conservativo” ou seja, um sistema sem perdas. Para o cálculo da força eletromagnética, vai-se, sem nenhuma perda de generalidade, considerar este sistema, ou seja:

$$W_e = \Delta W_a + W_m \quad (5)$$

2) Sistema Eletromagnético com Excitação Simples em Translação

Um exemplo de um sistema de conversão eletromagnética de energia, com excitação simples, pode ser visto na figura 2.1:

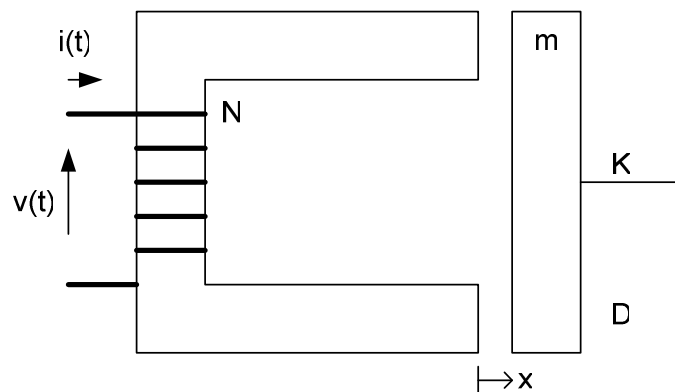


Figura 2.1: Conversor eletromecânico de excitação simples

A equação elétrica que descreve o comportamento da bobina é óbvia:

$$v = ri + \frac{d\lambda}{dt} \quad (6)$$

O fluxo total concatenado com a bobina pode ser dividido em duas partes: fluxo de magnetização e fluxo de dispersão.

$$\lambda = \lambda_{mag} + \lambda_{disp} \quad (7)$$

Considerando uma relação linear entre o fluxo de dispersão e a corrente tem-se:

$$\lambda_{disp} = \ell i \quad (8)$$

A equação (6) é uma equação de tensão. Para se obter uma equação de energia é preciso multiplicar pela corrente e integrar no tempo.

$$W_E = \int v i dt = \int r i^2 dt + \int \ell i di + \int i d\lambda_{mag} = W_e(perdas) + W_e(arm) + W_e \quad (9)$$

A energia elétrica de entrada no campo de acoplamento é portanto dada por:

$$W_e = \int i d\lambda_{mag} \quad (10)$$

A variação (ou o diferencial) desta energia, pode ser colocado da seguinte forma:

$$dW_e = i d\lambda_{mag} \quad (11)$$

Existem inúmeras formas de expressar a equação (11). Usando a lei de Faraday que diz que a tensão interna (e) é proporcional à variação do fluxo concatenado de magnetização com o tempo, vem:

$$dW_e = i e dt \quad (12)$$

É interessante notar que esta equação mostra que a toda variação de fluxo concatenado está relacionada uma variação da energia elétrica fornecida ao sistema. A variação do fluxo pode ocorrer de diversas formas, por exemplo, variando a fonte de energia, variando a relutância ou fazendo as duas variações simultaneamente.

A equação mecânica também pode ser obtida facilmente a partir da lei de Newton. Considerando que a massa da parte móvel do conversor seja “M”, tem-se:

$$f_R = M \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (13)$$

A força resultante será composta por todas as forças que atuam na parte móvel do conversor. Por exemplo:

$$f_R = f_e + f_K + f_D + f_0 \quad (14)$$

Onde f_e é a força elétrica, f_K a força da mola, f_D a força de atrito e f_0 uma força mecânica independente da posição. Considerando o coeficiente de amortecimento do

deslocamento seja dado por “D” e que uma mola de coeficiente de elasticidade “K” ligue a parte móvel do conversor a uma referência fixa, tem-se:

$$f_e = M \frac{d^2x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + K(x - x_0) + f_0 \quad (15)$$

Onde x_0 é ponto de equilíbrio da mola.

Integrando a equação (15) ao longo de um deslocamento “x”, tem-se uma equação relacionando energia semelhante à equação (3). A energia mecânica de saída do campo de acoplamento é dada por:

$$W_m = \int f_e dx \quad (16)$$

Ou, na forma diferencial:

$$dW_m = f_e dx \quad (17)$$

É interessante notar que só existe variação na energia mecânica se houver deslocamento da parte móvel do conversor.

Reescrevendo a equação (5) na sua forma diferencial, tem-se:

$$dW_e = dW_a + dW_m \quad (18)$$

Da análise desta equação é possível derivar uma expressão geral para força eletromagnética em um conversor. A expressão será determinada para um conversor de excitação simples mas a extensão do conceito para um conversor geral é absolutamente trivial.

Uma análise gráfica facilita bastante a compreensão da interação elétrica e mecânica no conversor. Considerando, inicialmente que o sistema esteja parado, ou seja, que não haja conversão de energia, é fácil determinar a energia armazenada no campo.

Se $dx = 0$, então, de (18) vem:

$$dW_a = dW_e = id\lambda \quad (19)$$

Considere também que o conversor mostrado na figura 2.1 esteja em uma posição $x = A$.

Nesta posição, a relação entre fluxo concatenado (de magnetização) e corrente será influenciada em grande parte pela relutância do entreferro. Pode-se então considerar aproximadamente linear a relação entre estas duas grandezas e a sua característica pode ser representada pela figura 2.2.

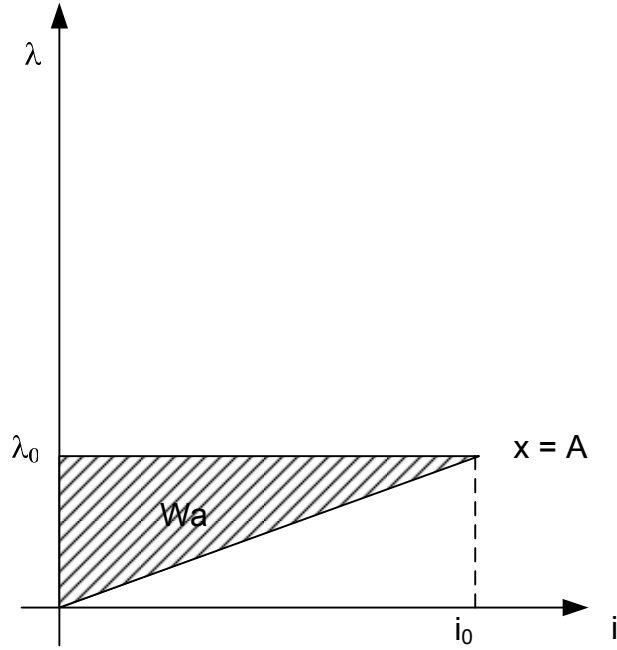


Figura 2.2: Característica fluxo x corrente do conversor na posição $x = A$

Nesta posição a determinação da energia armazenada no campo é simples. De fato, como:

$$W_a = \int_0^{\lambda_0} i d\lambda \quad (20)$$

A energia armazenada corresponde à área hachurada da figura 2.2.

Suponha agora que o conversor esteja parado em outra posição, por exemplo na posição $x = 0$. Neste caso a totalidade da relutância vista pela força magnetomotriz produzida pela bobina será a do ferro. A relação fluxo corrente não é necessariamente linear. Representando esta relação pela figura 2.3, é fácil determinar a área que corresponde à energia armazenada no campo nesta condição.

Note que a energia armazenada independe de como o conversor passou da posição $x = A$ para $x = 0$. Note também que foi considerado que a corrente no conversor era a mesma nas duas situações. Independentemente da linearidade do sistema, a energia armazenada no conversor parado corresponde à área sob a curva da corrente em função do fluxo.

Definição de Co-energia

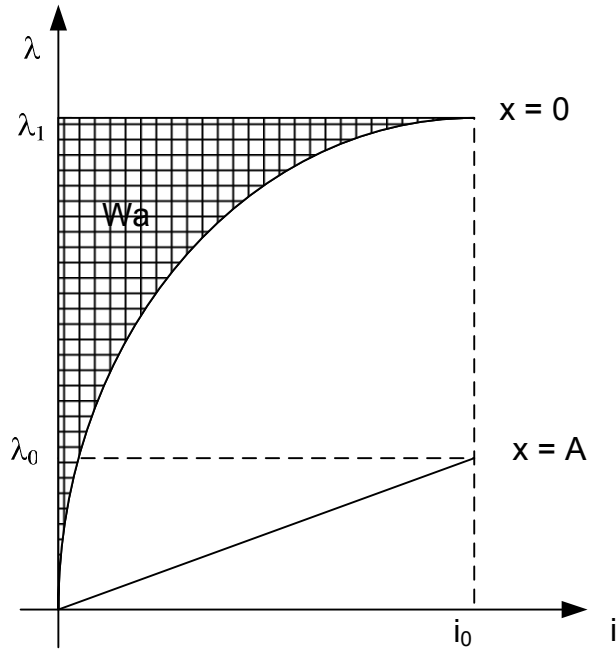


Figura 2.3: Energia armazenada no conversor na posição $x = 0$

Em muitas situações é mais conveniente considerar como variável a corrente em lugar do fluxo. Para fazer esta mudança de variáveis define-se uma grandeza chamada co-energia (W_a') que corresponde ao complemento da energia armazenada em relação ao produto fluxo por corrente. Matematicamente, tem-se:

$$W_a + W_a' = \lambda i \quad (21)$$

Na forma diferencial:

$$dW_a + dW_a' = \lambda di + i d\lambda \quad (22)$$

Logo, em uma determinada posição, com $dx = 0$, tem-se:

$$dW_a' = \lambda di \quad (23)$$

A interpretação gráfica da co-energia é direta. Repetindo os dois gráficos mostrados nas figuras anteriores tem-se:

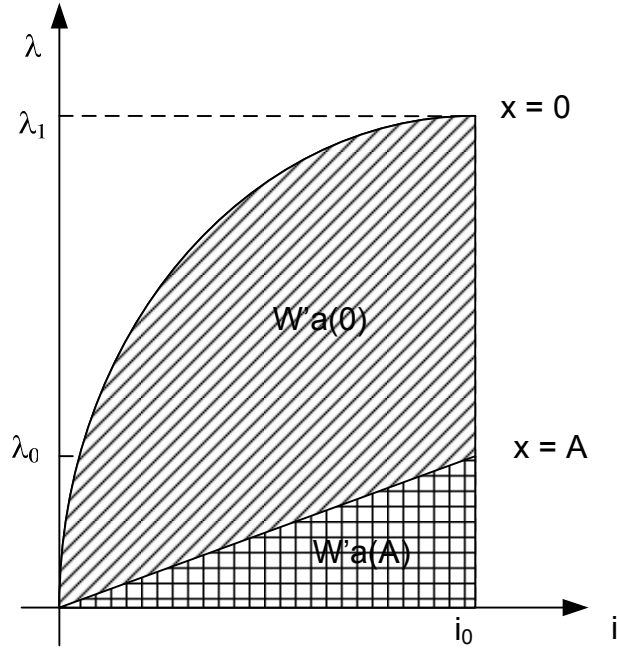


Figura 2.4: Definição gráfica de co-energia

Exemplo 1

A partir da definição gráfica de energia e co-energia, determine graficamente o valor da força eletromagnética média supondo que é a única força atuando no conversor e que o movimento de passagem da posição $x = A$ para $x = 0$ seja muito lento. Tão lento a ponto de supor que a corrente na bobina permaneça inalterada.

Solução

De fato, a corrente na bobina é dada pela equação (6) e pode ser reescrita como:

$$i = \frac{v - d\lambda/dt}{r} \quad (24)$$

Se a variação do fluxo for suficientemente lenta na sua passagem de A para 0 , pode-se supor que a corrente permaneça constante e igual a i_0 .

Neste caso, como há o movimento da parte móvel do conversor a equação que descreve a conservação da energia no sistema conservativo será a equação 5 que é reescrita abaixo:

$$W_e = \Delta W_a + W_m \quad (25)$$

Onde

$$W_e = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} i d\lambda = i_0 (\lambda_1 - \lambda_0) \quad (26)$$

A energia armazenada nos pontos $x = A$ e $x = 0$ foram mostradas nas figuras 2.2 e 2.3 respectivamente.

A energia mecânica transformada por este conversor neste deslocamento de sua parte móvel corresponde graficamente à diferença entre a entrada da energia elétrica e a variação da energia armazenada nos dois pontos, ou seja:

$$W_m = W_e - W_a(0) + W_a(A) \quad (27)$$

Graficamente corresponde à área marcada na figura 2.5.

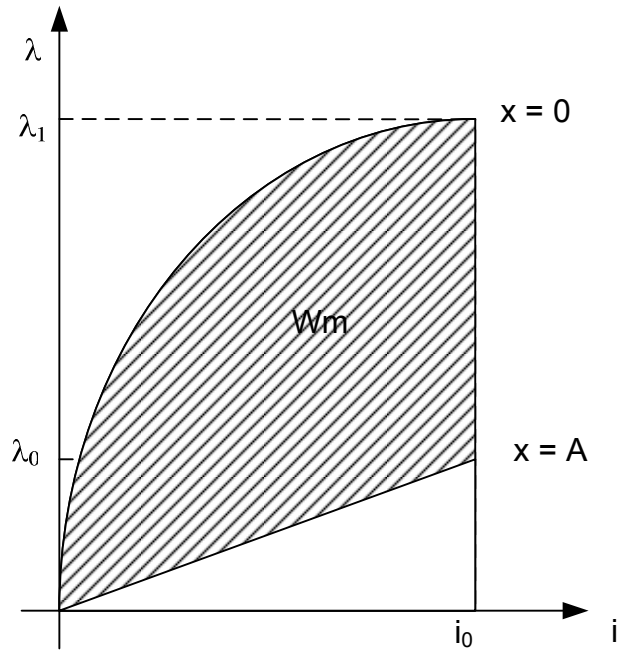


Figura 2.5: Energia mecânica

É fácil observar que esta área corresponde à variação da co-energia do ponto 0 em relação ao ponto A.

$$W_m = W'_a(0) - W'_a(A) = \Delta W'_a \quad (28)$$

A partir da definição da equação (16), observa-se que a força eletromagnética média pode ser escrita como:

$$f_e(\text{média}) = \frac{\Delta W'_a}{\Delta x} \quad (29)$$

Considerando um deslocamento infinitesimal (dx) obtém-se a força instantânea:

$$f_e = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta W'_a}{\Delta x} = \left. \frac{\partial W'_a}{\partial x} \right|_{i=cte} \quad (30)$$

Exemplo 2

Repetir o exemplo anterior considerando que o movimento de A para 0 seja instantâneo, ou muito rápido.

Solução

Considerando que o movimento seja muito rápido, não é possível admitir qualquer variação no fluxo concatenado com a bobina. Caso contrário, pela lei de Faraday, seria induzida uma tensão infinita nos terminais da bobina.

Quando o fluxo permanece constante, a solução da equação de equilíbrio de energia fica muito simples uma vez que não há variação de energia elétrica.

$$d\lambda = 0$$

$$dW_e = id\lambda = 0 \quad (31)$$

$$dW_m = -dW_a$$

A equação (31) mostra claramente que, como não houve variação da energia elétrica, toda a energia mecânica foi tirada da energia armazenada no campo. Graficamente, tem-se:

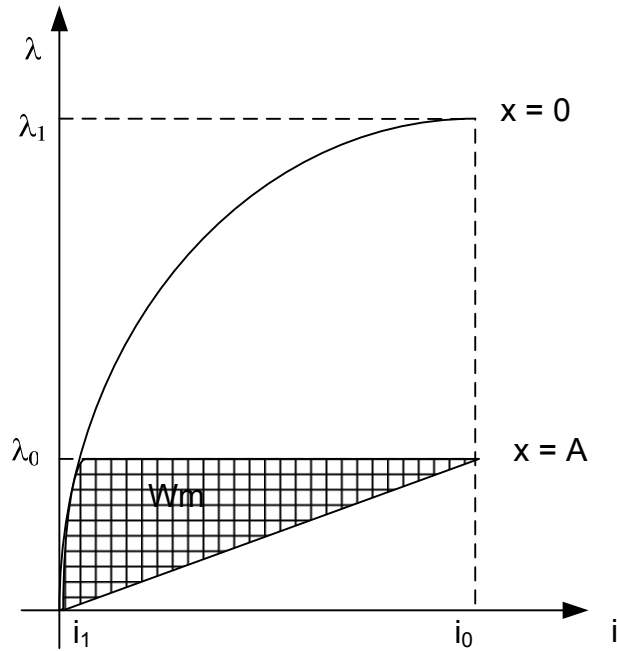


Figura 2.6: Deslocamento instantâneo com fluxo constante.

A corrente circulando na bobina reduz-se instantaneamente de i_0 para i_1 e praticamente toda energia armazenada no campo (aberto $x = A$) se transforma em energia mecânica. O valor da força média pode então ser dado por:

$$f_e(\text{média}) = \frac{W_a(0) - W_a(A)}{\Delta x} = -\frac{\Delta W_a}{\Delta x} \quad (32)$$

O valor da força instantânea, considerando um deslocamento infinitesimal (dx) com fluxo constante, será:

$$f_e = - \left. \frac{\partial W_a}{\partial x} \right|_{\lambda = cte} \quad (33)$$

Observe que a força eletromagnética positiva tende a diminuir a energia armazenada no sistema. Fazendo um paralelo com um sistema puramente mecânico e bastante conhecido, a força gravitacional tende a diminuir a energia potencial de uma massa. A força eletromagnética é sempre no sentido de diminuir a relutância do caminho magnético.

Exemplo 3

Se a fonte de tensão aplicada no conversor fosse constante, o que aconteceria com a corrente após o conversor atingir a posição $x = 0$?

Solução

A corrente voltaria ao seu valor inicial i_0 . O fluxo concatenado com a bobina mudaria de λ_0 para λ_1 . Toda energia elétrica fornecida ao conversor ficaria armazenada no campo uma vez que não há movimento. No gráfico da figura 2.7 a área marcada corresponde à quantidade de energia elétrica fornecida ao conversor que é armazenada pelo campo.

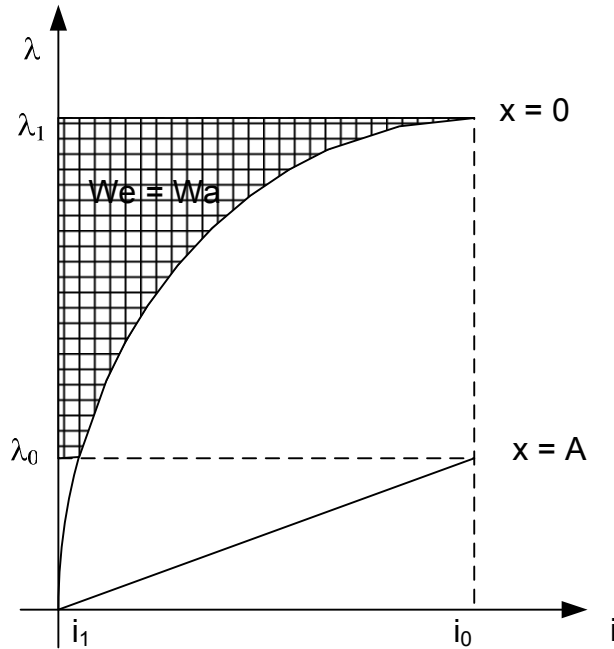


Figura 2.7: Energia armazenada após o deslocamento instantâneo

Observe que este exemplo é muito parecido com aquele que foi feito no item de conservação do fluxo concatenado.

Exemplo 4

No caso de um movimento qualquer, qual seria a expressão para a força eletromagnética?

Solução

Considere o mesmo conversor, no seu deslocamento do ponto $x = A$ para o ponto $x = 0$, tanto o fluxo quanto a corrente podem (e devem) se alterar. O deslocamento entre os dois pontos pode ser feito através de qualquer trajetória entre os dois casos limites mostrados nos exemplos anteriores. A seta na figura 2.8 mostra o deslocamento conversor considerando que tanto o fluxo quanto a corrente variam ao longo do tempo.

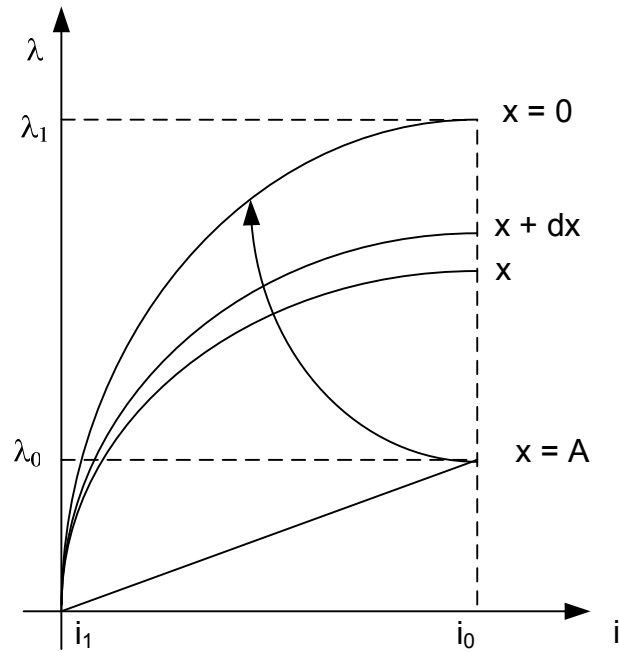


Figura 2.8: Deslocamento qualquer

A mesma análise gráfica pode ser feita no caso do deslocamento qualquer. Pode-se perceber que o valor da força média é diferente em cada caso. No entanto, considerando um deslocamento infinitesimal (dx), a área do gráfico igual à variação da co-energia tende a igualar à área da variação da energia com sinal trocado, ou seja, em um movimento qualquer, o valor da força eletromagnética é dado por:

$$f_e = - \left. \frac{\partial W_a}{\partial x} \right|_{\lambda=cte} = \left. \frac{\partial W'_a}{\partial x} \right|_{i=cte} \quad (34)$$

Exemplo 5

Determine matematicamente uma expressão para a força eletromagnética dos exemplos anteriores.

Solução

Como foi visto, da definição de diferencial da energia elétrica e mecânica (equações 11 e 17) vem:

$$dW_e = id\lambda \quad (35)$$

$$dW_m = f_e dx \quad (36)$$

Retomando o princípio da conservação da energia (equação 18):

$$\begin{aligned} dW_e &= dW_a + dW_m \\ dW_a &= dW_e - dW_m \end{aligned} \quad (37)$$

Lembrando que a energia armazenada no campo é uma função de duas variáveis, ou seja, a posição e o fluxo, vem:

$$W_a = W_a(\lambda, x) \quad (38)$$

$$dW_a = \frac{\partial W_a}{\partial x} dx + \frac{\partial W_a}{\partial \lambda} d\lambda \quad (39)$$

Identificando os coeficientes das equações (37) e (39), vem:

$$f_e = - \left. \frac{\partial W_a}{\partial x} \right|_{\lambda=cte} \quad (40)$$

$$i = \left. \frac{\partial W_a}{\partial \lambda} \right|_{x=cte} \quad (41)$$

Exemplo 6

Determine matematicamente a força eletromagnética usando a definição de co-energia.

Solução

A co-energia, na forma que foi definida, é uma função da corrente e da posição. Os gráficos mostram claramente a diferença entre a energia e a co-energia. Portanto:

$$W'_a = W'_a(i, x) \quad (42)$$

$$dW'_a = \frac{\partial W'_a}{\partial i} di + \frac{\partial W'_a}{\partial x} dx \quad (43)$$

A partir da definição de co-energia, tem-se também que:

$$dW_a + dW'_a = \lambda di + id\lambda \quad (44)$$

Como

$$dW_a = id\lambda - f_e dx \quad (45)$$

Então, substituindo (45) em (44), vem:

$$dW'_a = \lambda di + f_e dx \quad (46)$$

Igualando os coeficientes de (43) com (46), tem-se:

$$f_e = \left. \frac{\partial W'_a}{\partial x} \right|_{i=cte} \quad (47)$$

e o fluxo é dado pela variação da co-energia com a corrente, mantendo a posição constante.

$$\lambda = \left. \frac{\partial W'_a}{\partial i} \right|_{x=cte} \quad (48)$$

As expressões calculadas para força eletromagnética foram obtidas sem fazer nenhuma hipótese sobre a linearidade do sistema. O exemplo foi feito com um sistema não linear. Considerar o sistema linear simplifica muito as relações uma vez que se pode colocar o fluxo em função da corrente ou vice-versa.

Exemplo 7

Determine uma expressão para força eletromagnética considerando linear a relação entre fluxo e corrente em qualquer posição do conversor.

Solução

Repetindo a figura 2.3 e considerando linear a relação entre fluxo e corrente tanto na posição $x = A$ quanto na outra $x = 0$, obtém-se a figura 2.9.

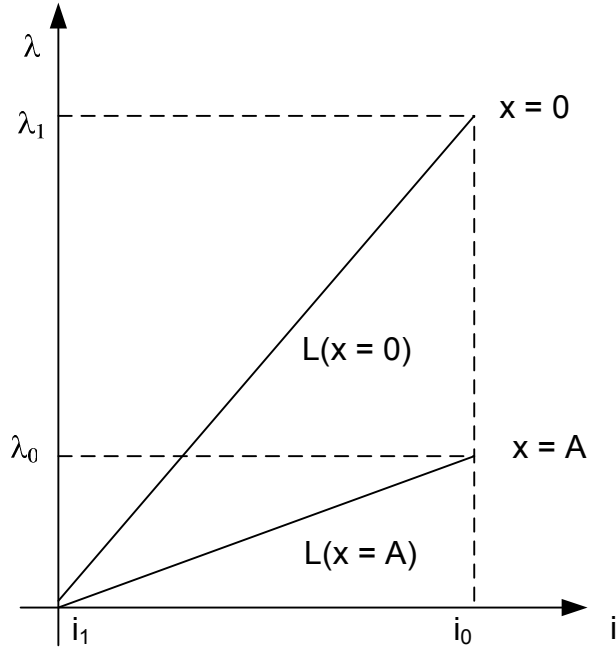


Figura 2.9: Relação linear entre fluxo e corrente

Observa-se que nas duas posições existe um coeficiente que relaciona fluxo com corrente e que este coeficiente (a indutância) é função da posição. Pode-se escrever então que:

$$\lambda = L(x).i \quad (49)$$

A energia e a co-energia, neste caso, tem sempre o mesmo valor numérico. Pode-se observar da figura 2.9 que a força eletromagnética tende a diminuir a energia armazenada supondo o fluxo constante ou aumentar a co-energia armazenada supondo a corrente constante. As expressões de força deduzidas anteriormente podem ser usadas novamente. Pode-se usar tanto a expressão relacionando a força com a energia quanto com a co-energia. É mais usual utilizar a expressão da co-energia porque a relação entre o fluxo e a corrente é a indutância, bastante conhecida. Já a relação entre a corrente e o fluxo é o inverso da indutância cuja definição é menos natural. Em sistemas com excitação simples esta diferença parece insignificante, no entanto, em sistemas com muitas entradas a simplificação é bem mais nítida como será visto adiante.

A co-energia armazenada no ponto $x = A$ é dada por:

$$W'_a = \int_0^{i_0} \lambda di = \int_0^{i_0} L(x)idi = \frac{1}{2} L(x)i_0^2 \quad (50)$$

Note que para integrar esta equação considerou-se que a indutância independe da corrente. Retomando a equação (47), tem-se:

$$f_e = \left. \frac{\partial W'_a}{\partial x} \right|_{i=cte} = \frac{1}{2} i_0^2 \frac{\partial L(x)}{\partial x} \quad (51)$$

O valor instantâneo da força é, portanto, proporcional ao quadrado da corrente e da variação da indutância com a posição.

3) Sistema com Dupla Excitação em Rotação

A figura 3.1 mostra um exemplo de um sistema de conversão de energia com dupla excitação em rotação.

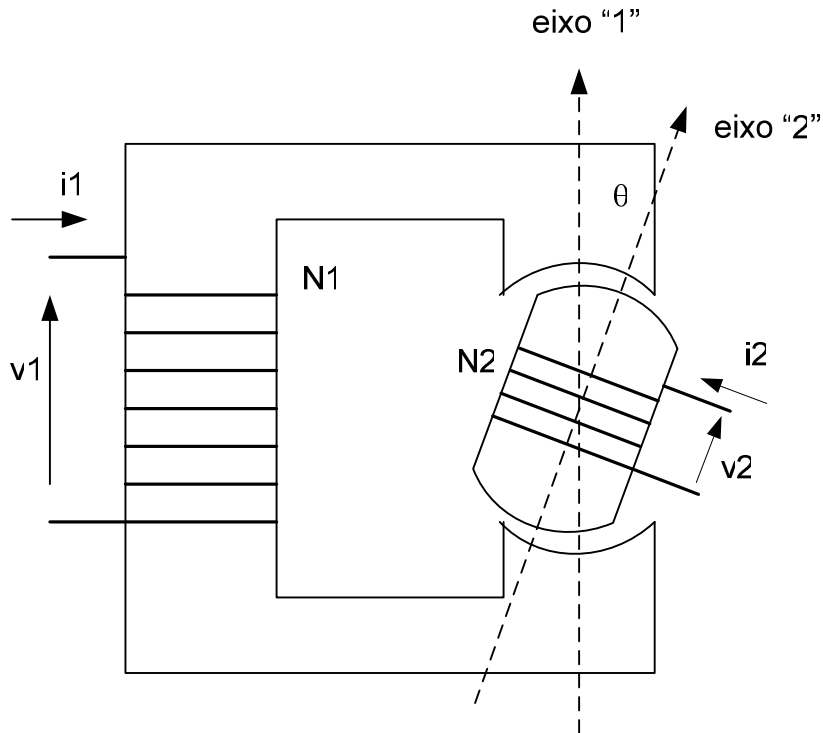


Figura 3.1: Exemplo de conversor com dupla excitação em rotação

Exemplo 8

Considere que o sistema com dupla excitação da figura 3.1 seja linear e determine uma expressão para a co-energia armazenada na posição θ .

Solução

A co-energia armazenada em um sistema de múltiplos enrolamentos será dada pela somatória das co-energias em cada sistema individual. Neste caso com duas excitações tem-se:

$$dW'_a = \lambda_1 di_1 + \lambda_2 di_2 \quad (52)$$

O fluxo concatenado com cada espira depende das indutâncias próprias e mútuas que, por sua vez, dependem da posição θ .

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}(\theta) & L_{12}(\theta) \\ L_{21}(\theta) & L_{22}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (53)$$

ou

$$[\lambda] = [L(\theta)][i] \quad (54)$$

Substituindo a definição do fluxo na expressão (52) e considerando que a corrente final na bobina 1 seja i_1 e na bobina 2 seja i_2 , tem-se:

$$W'_a = \iint (L_{11}(\theta)i_1 + L_{12}(\theta)i_2)di_1 + (L_{21}(\theta)i_1 + L_{22}(\theta)i_2)di_2 \quad (55)$$

Considerando os limites de integração de $(0, i_1)$ e $(0, i_2)$ e que as indutâncias são função da posição mas independem da corrente, vem:

$$W'_a = \frac{1}{2} L_{11}(\theta)i_1^2 + L_{12}(\theta)i_1i_2 + \frac{1}{2} L_{22}(\theta)i_2^2 \quad (56)$$

É possível colocar esta expressão em forma matricial. Usando a equação (54) em conjunto com a (56) obtém-se:

$$W'_a = \frac{1}{2} [i]^T \{ [L(\theta)] \} [i] \quad (57)$$

Onde o símbolo “T” se refere ao vetor transposto (no caso, de corrente).

Exemplo 9

Calcule o conjugado eletromagnético no conversor do exemplo anterior.

Solução

Lembrando que em movimento de rotação a energia mecânica é dada por:

$$dW_m = \Gamma_e d\theta \quad (58)$$

Por analogia ao que foi feito para a força eletromagnética, obtém-se:

$$\Gamma_e = \left. \frac{\partial W'_a}{\partial \theta} \right|_{i=cte} \quad (59)$$

Juntando as equações (59) e (57), tem-se:

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} [i]^T \left\{ \frac{\partial [L(\theta)]}{\partial \theta} \right\} [i] \quad (60)$$

Observe que a expressão foi deduzida para um sistema de 2 excitações mas pode ser estendida para um sistema qualquer de “n” excitações. Neste caso, a ordem da matriz de indutância e dos vetores de corrente passa a ser “n”.

É muito importante observar que a base para se estudar o comportamento de um conversor é a sua matriz de indutância. Tanto a equação mecânica, em função da força ou do conjugado eletromagnético, quanto a equação elétrica, dada pela lei de Faraday.

Exemplo 10

Determine uma expressão para o conjugado eletromagnético do conversor da figura 3.1 supondo que a corrente na bobina 2 seja igual a zero.

Solução

O primeiro passo é calcular como a indutância varia com a posição angular θ . Considerando o material magnético de alta permeabilidade, a relutância do caminho magnético estaria concentrada no entreferro. A posição θ do rotor é fundamental na determinação da relutância (ou permeância) do caminho magnético.

A permeância é máxima quando $\theta = 0$ ou 180° , e é mínima quando $\theta = 90^\circ$ ou 270° . Outro fato facilmente observável da figura é que o valor da permeância é uma função periódica e depende do desenho da sapata polar. Esta função periódica pode ser decomposta em série de Fourier. Considerando apenas os dois primeiros termos, em função da permeância máxima (chamada de permeância de eixo direto P_d) e da permeância mínima (chamada de permeância de eixo em quadratura P_q) tem-se:

$$P(\theta) = \frac{P_d + P_q}{2} + \frac{P_d - P_q}{2} \cos 2\theta \quad (61)$$

A indutância será também uma função da posição θ . Diretamente da definição, tem-se:

$$L(\theta) = N^2 P(\theta) \quad (62)$$

Chamando de indutância de eixo direto (L_d) a indutância da bobina quando os dois eixos estão alinhados e de indutância de eixo em quadratura (L_q) aquela quando os eixos estão defasados de 90° (em quadratura), tem-se:

$$L(\theta) = \frac{L_d + L_q}{2} + \frac{L_d - L_q}{2} \cos(2\theta) \quad (63)$$

Como o conjugado é dado pela variação da co-energia com a posição, tem-se:

$$\Gamma_e = \frac{\partial W'_a}{\partial \theta} = -\frac{1}{2} i^2 (L_d - L_q) \sin(2\theta) \quad (64)$$

O conjugado, como nos outros exemplos, tende a diminuir a relutância do caminho magnético (ou aumentar a indutância) que no caso consiste no alinhamento dos eixos.

Este conjugado é chamado de conjugado de relutância. O princípio deste conjugado é usado nos motores de passo.

Exemplo 11

Analisar o dispositivo da figura abaixo e determinar qual a posição de repouso da sua parte móvel se $v(t) = 10V$ (DC), $r = 10\Omega$, a constante da mola $K = 3000$ N/m, e a posição de repouso da mola ocorre em $x_0 = 5$ mm. Considerar ainda que a área do entreferro é de 100 mm^2 , a bobina tem $N = 1000$ espiras e que a relutância do caminho ferromagnético é desprezível.

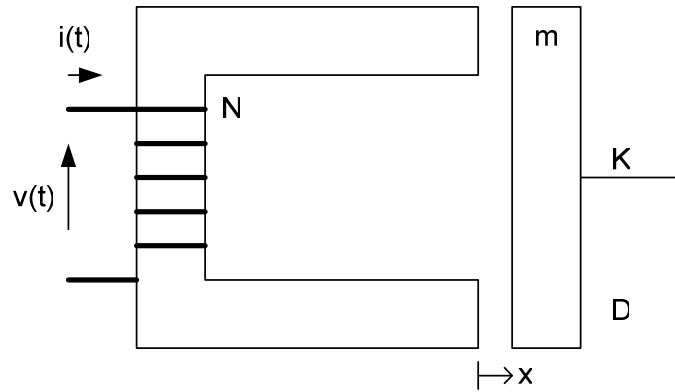


Figura 3.2: Conversor em translação

Solução

A solução deste problema passa pela resolução simultânea das equações elétrica e mecânica do sistema, ou seja, da Lei de Faraday e de Newton.

$$v = ri + \frac{d\lambda}{dt} \quad (65)$$

$$f_e = M \frac{d^2x}{dt^2} + D \frac{dx}{dt} + K(x - x_0) \quad (66)$$

As duas equações dependem da expressão da indutância em função da posição “x” já que:

$$\lambda = L(x)i \quad (67)$$

$$f_e = \frac{1}{2} i^2 \frac{\partial L(x)}{\partial x} \quad (68)$$

O cálculo da indutância em função da posição para este conversor e nestas condições é muito simples:

$$L(x) = \frac{N^2}{\mathfrak{R}(x)} \quad (69)$$

Onde a relutância é dada por:

$$\mathfrak{R}(x) = \frac{2x}{\mu_0 A} \quad (70)$$

Substituindo os valores numéricos dados do problema, tem-se:

$$L(x) = \frac{C}{x} \quad (71)$$

Onde $C = 2\pi \cdot 10^{-5}$ H.m.

A determinação da força eletromagnética é então dada pela derivada em função da posição da expressão da indutância.

$$f_e = -\frac{1}{2} i^2 \frac{C}{x^2} \quad (72)$$

Esta expressão só é válida para valores de “x” maiores do que zero. Evidentemente, quando $x = 0$ toda a relutância do circuito magnético está concentrada no ferro, e, neste exemplo, esta relutância foi desprezada.

O sinal negativo da força eletromagnética indica que ela se opõe ao sentido positivo do deslocamento, portanto, o sentido da força é aquele mostrado na figura 3.2.

Em regime permanente, as variações das grandezas com o tempo não são consideradas, então, a solução deste problema fica muito simplificada. A resolução da equação elétrica, por exemplo, é direta:

$$i = \frac{v}{r} = 1A \quad (73)$$

A equação mecânica fica reduzida ao equilíbrio da força eletromagnética com a força da mola.

$$f_e = f_k \quad (74)$$

A força da mola é positiva no sentido indicado na figura (oposta à força eletromagnética) quando $x < x_0$. Portanto:

$$f_k = K(x_0 - x) \quad (75)$$

Igualando-se as duas expressões (72) e (75), obtém-se uma equação do terceiro grau em x. Uma solução mais simples pode ser obtida substituindo valores de x nas duas expressões, conforme tabela 3.1, obtida com uma planilha de cálculo.

Tabela 3.1: Valores numéricos para as forças

x (mm)	f_e (N)	f_k (N)
0		15,00
1	31,14	12,00
2	7,79	9,00
3	3,46	6,00
4	1,95	3,00
5	1,25	0,00

Pode também ser traçada uma curva relacionando as duas forças em função da posição x dada em milímetro. Esta curva está mostrada na figura 3.3.

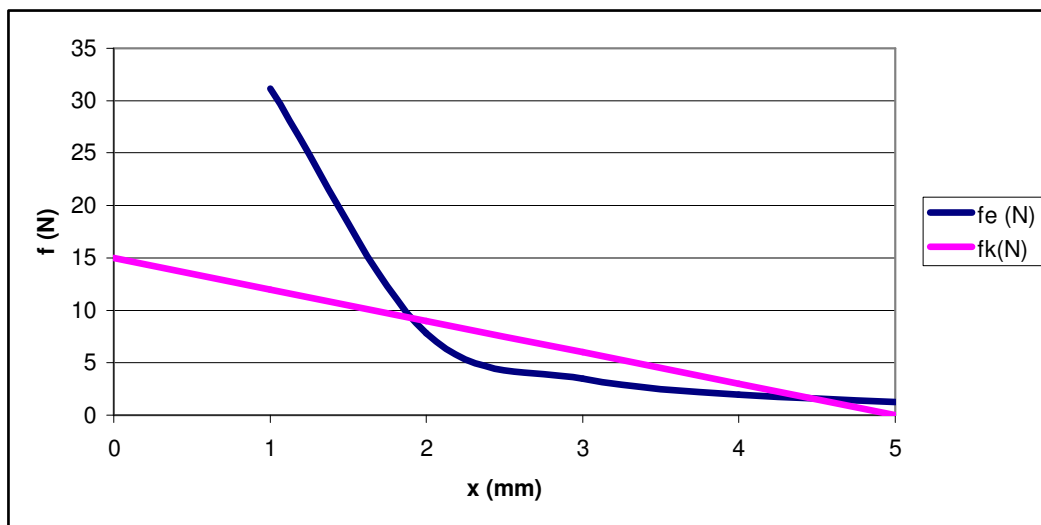


Figura 3.3: Força Eletromagnética e da mola em função da posição

Observa-se que as duas forças se igualam em dois pontos, para $x = 1,8$ mm e para $x = 4,6$ mm.

Exemplo 12

Em qual dos dois pontos o equilíbrio é estável?

Solução

Se houver uma pequena variação da posição da parte móvel do conversor, ao redor do ponto $x = 4,6$ mm, observa-se que se a distância aumentar, a força eletromagnética fica maior que a da mola fazendo com que ela volte a sua posição inicial. Se a distância diminuir, a força da mola fica maior que a eletromagnética causando o mesmo efeito.

Por outro lado, se a posição de equilíbrio fosse o ponto $x = 1,8$ mm, qualquer perturbação ou variação nesta posição faria com que ou o conversor se fechasse ou se equilibrasse no outro ponto de equilíbrio. Portanto, a única solução possível é para $x = 4,6$ mm.

Exemplo 13

Simular a dinâmica do dispositivo supondo que a tensão seja aplicada em $t = 0$, e que o dispositivo se encontrava em uma posição inicial $x = 1$ mm, que a massa da parte móvel é de $m = 50$ g, e que o coeficiente de amortecimento $D = 4$ Ns/m.

Solução

A consideração do regime dinâmico consiste simplesmente da resolução simultânea das duas equações definidas anteriormente.

Como a equação mecânica é de segunda ordem, convém fazer uma troca de variáveis de forma a transformar o sistema em 3 equações diferenciais simultâneas de primeira ordem. Reescrevendo as equações, definindo a velocidade como sendo a variação da posição com o tempo, tem-se:

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (76)$$

A equação elétrica, depois de expandida, fica da seguinte forma:

$$v = ri + \ell \frac{di}{dt} + L(x) \frac{di}{dt} + i \frac{dL(x)}{dx} \frac{dx}{dt} \quad (77)$$

Colocando-a em função da derivada da corrente, tem-se:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L(x) + \ell} \left\{ v - ri - \frac{dL(x)}{dx} v \cdot i \right\} \quad (78)$$

A equação mecânica, colocada em função da variação da velocidade é dada por:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{M} \{ f_e - Dv - K(x_0 - x) \} \quad (79)$$

Este conjunto de 3 equações diferenciais, não lineares, que não tem solução analítica, pode ser resolvido facilmente através de um processo numérico do tipo “Runge-Kutta”.

Supondo que a velocidade e a corrente iniciais são nulas, os outros valores em função do tempo são calculados diretamente a partir dos dados fornecidos. Note que não é possível definir a posição inicial igual a zero uma vez que a força eletromagnética tende a infinito.

Usando um programa do tipo Matlab, a resolução é trivial. O arquivo e os resultados estão mostrados abaixo.

```
kp = 6.28e-5;
t0 = 0;
tf = 0.12;
```

```

x0 = [0 0 0.001]';
[t,x] = ode23('rele',t0,tf,x0);
xx = [x(:,1) x(:,2) 1e2*x(:,3)]';
lambda = [kp*x(:,1)./x(:,3)];
%plot(x(:,1),lambda)
plot(t,xx)

function xponto = rele(t,x)
% dinamica massa mola
xponto = zeros(3,1);
% parametros
r = 10; xo = 0.005; K = 3000; kp = 6.28e-5;
V = 10; l = 0; M = 0.05; D = 4;
f=0;
% equacoes
lx = kp/x(3);
dldx = -kp/(2*x(3)^2);
xponto(1) = (1/(lx+l))*(V-(r + dldx*x(2))*x(1));
xponto(2) = (f - D*x(2) - K*(x(3)-xo) + dldx*x(1).^2)/M;
xponto(3) = x(2);

```

O resultado da simulação é dado na figura 3.4.

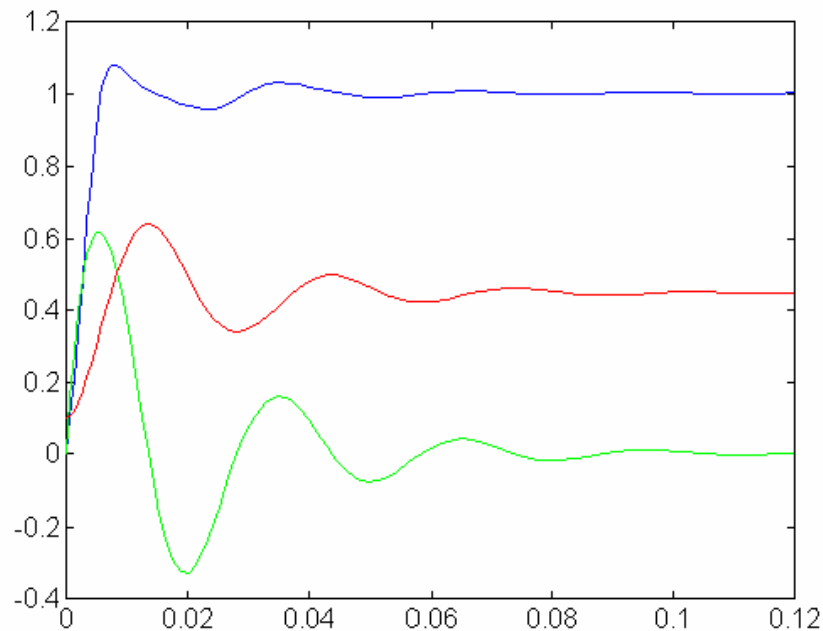


Figura 3.4: Corrente, posição ($\times 10^2$) e velocidade em função do tempo.

Exemplo 14

Suponha que uma força mecânica de 5 N possa ser aplicada no conversor. Determinar o novo ponto de equilíbrio e traçar uma curva relacionando fluxo e corrente durante a passagem de um ponto para o outro.

Solução.

Como a solução em regime permanente é um caso particular da solução dinâmica, vai-se resolver simplesmente o regime transitório considerando a mudança de estado em $t = 0,1$ s e a volta ao estado anterior em $t = 0,2$ s.

A simulação numérica das equações diferenciais descritas anteriormente, com a inclusão de uma força constante, é idêntica e os resultados estão mostrados abaixo.

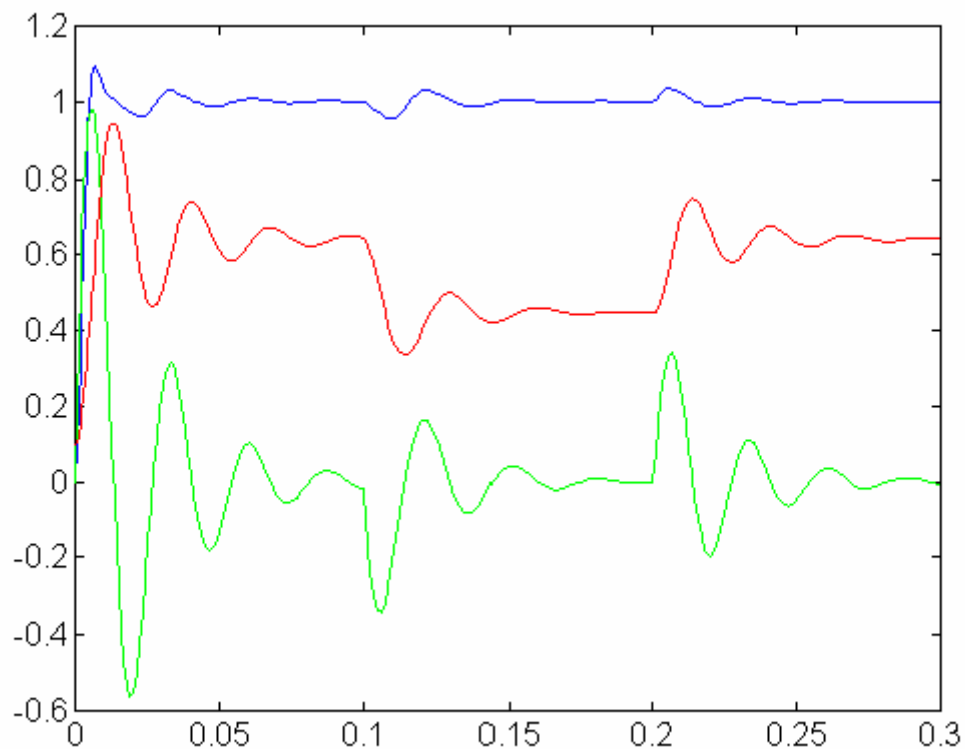


Figura 3.5: Corrente, posição ($\times 10^2$) e velocidade em função do tempo.

Observa-se que a posição de repouso passa a ser 6,5 mm e quando se tira a força externa de 5 N o conversor volta a sua posição anterior: 4,6 mm.

Plotando o gráfico do fluxo em função da corrente obtém-se a figura 3.6.

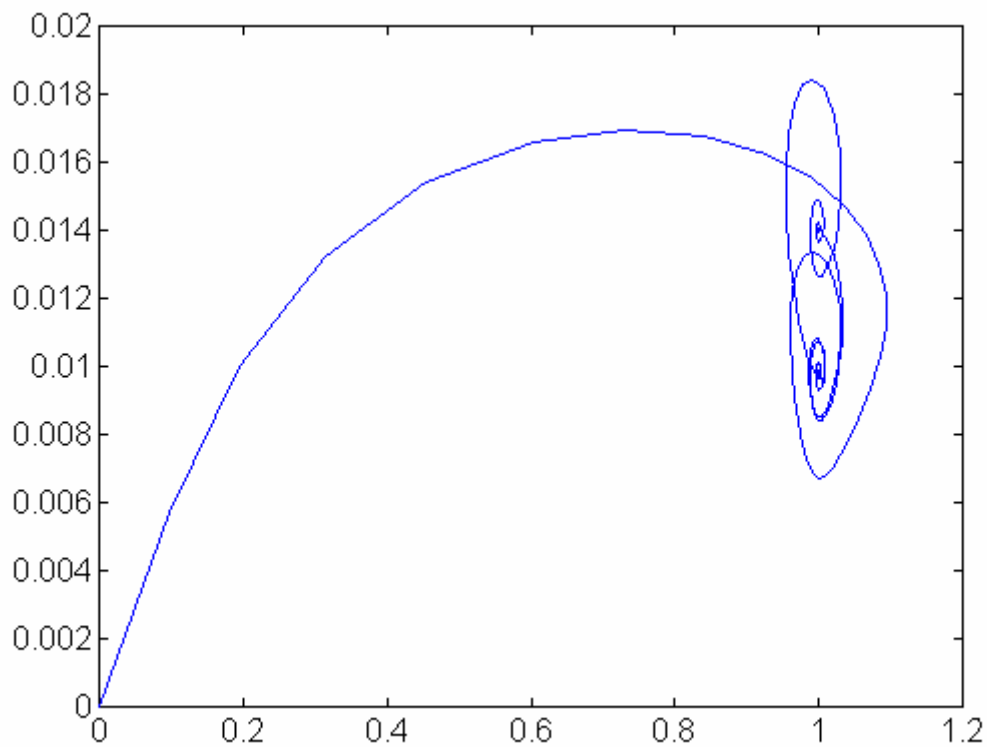


Figura 3.6: Fluxo (Wb) em função da corrente (A)

Observa-se que a corrente, nas duas situações tende para 1 A, e que a passagem de um ponto para o outro se dá, como era de se esperar, com a variação simultânea do fluxo e da corrente.

4) Conceitos Básicos de Máquinas Rotativas

As máquinas rotativas são formadas por circuitos acoplados em movimento. Normalmente o movimento é rotacional. Neste item vai-se analisar os conceitos básicos torque, tensão induzida e força magnetomotriz das máquinas rotativas. É interessante iniciar a análise com uma máquina elementar com um único enrolamento no estator e outro no rotor.

Exemplo 15

Dado o conversor de dois enrolamentos da Figura 4.1, analisar o seu comportamento elétrico e mecânico. Observer que nesta figura é definido o ângulo θ como sendo a posição angular do eixo magnético do rotor em relação ao eixo magnético da bobina do estator. Se o rotor gira a uma velocidade ω , então:

$$\theta = \omega t + \theta_0 \quad (80)$$

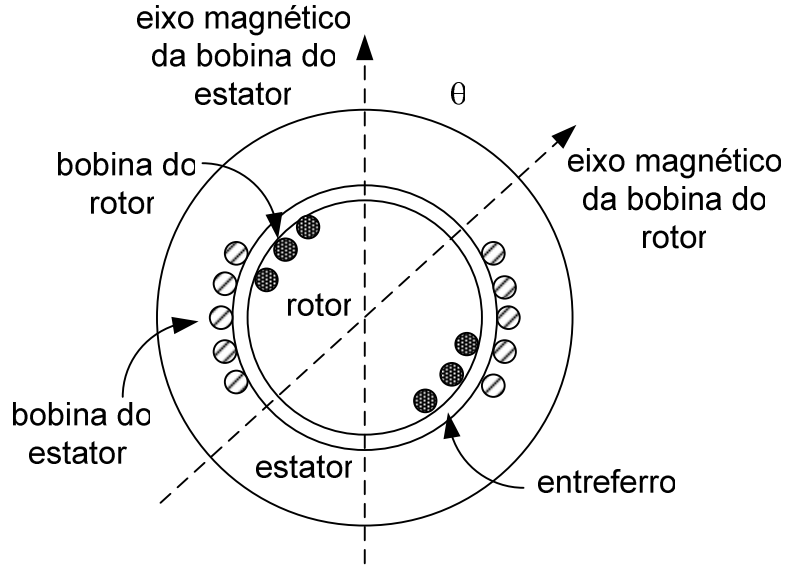


Figura 4.1: Esquema de um conversor de dois enrolamentos rotativo

Solução

Determinar o comportamento elétrico e mecânico do conversor consiste em resolver as equações diferenciais elétricas e mecânicas como foi visto no item anterior. A equação elétrica matricial é dada por:

$$[v] = [r][i] + \frac{d}{dt}[\lambda] \quad (81)$$

ou

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a & 0 \\ 0 & r_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_F \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_F \end{bmatrix} \quad (82)$$

Foi usado o índice “a” minúsculo para definir o enrolamento do estator e “F” maiúsculo para o enrolamento do rotor. Considerando que o sistema seja linear:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{aF} \\ L_{Fa} & L_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_F \end{bmatrix} \quad (83)$$

A equação mecânica, como também já foi visto e desprezando o efeito do atrito, pode ser escrita como:

$$\Gamma_e - \Gamma_m = J \frac{d^2 \theta}{dt^2} \quad (84)$$

Onde o conjugado elétrico é dado por:

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} [i]^T \left\{ \frac{\partial [L(\theta)]}{\partial \theta} \right\} [i] \quad (85)$$

Mais uma vez, o fundamental é o cálculo da matriz de indutância que, neste exemplo, é função da posição θ .

A indutância, por definição, é a relação entre o fluxo concatenado e a corrente. O fluxo concatenado, por sua vez, é proporcional à relação entre a força magnetomotriz e a relutância. No conversor deste exemplo a relutância está praticamente concentrada no entreferro e, desprezando o efeito das ranhuras, pode ser considerada constante.

Para se determinar a matriz de indutância, é fundamental o cálculo da força magnetomotriz produzida pelos enrolamentos distribuídos no estator. Antes de se fazer o cálculo completo vai-se simplificar um pouco mais o modelo do conversor para facilitar a análise.

4.1) Força Magnetomotriz de enrolamentos distribuídos

Exemplo 16

Determinar a forma da força magnetomotriz produzida por uma única espira do conversor do exemplo anterior.

Solução

Considerando a espira central do estator do conversor da figura 4.1, pode-se observar que as linhas de fluxo produzidas por esta espira vão “enxergar” basicamente a relutância do entreferro inferior e superior como mostra a Figura 4.2.

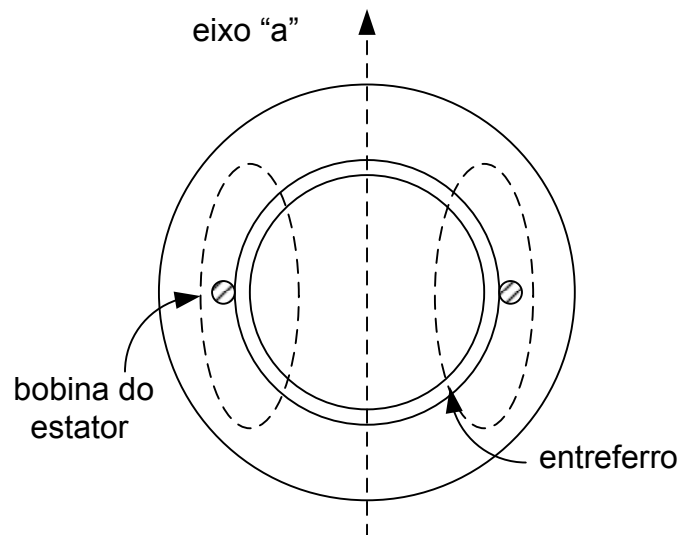


Figura 4.2: Linhas de fluxo produzidas por uma única espira.

A força magnetomotriz (fmm) é dada pela lei de Ampère. Supondo a relutância do ferro desprezível, só haverá intensidade de campo (H) no entreferro e a fmm será igual ao seu produto escalar com o comprimento.

$$fmm = \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (86)$$

Considerando a intensidade de campo radial, o que é bastante razoável devido ao tamanho reduzido do entreferro, este produto escalar será igual ao produto dos módulos. Se a intensidade de campo e o caminho de integração estiverem na mesma direção o produto será positivo e se estiverem em direções opostas ele será negativo.

Para facilitar a visualização em muitos casos usa-se retificar o entreferro. A Figura 4.3 mostra a máquina elementar da Figura 4.2 com o entreferro linearizado.

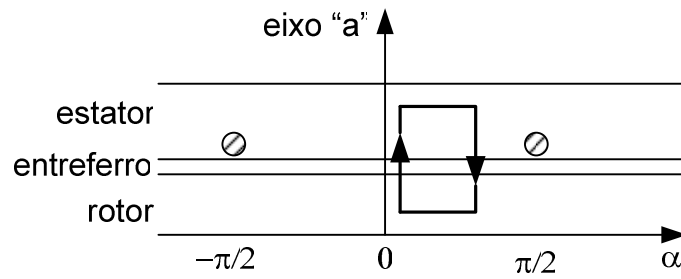


Figura 4.3: Retificação do entreferro

O ângulo α definido na figura anterior se refere à posição espacial do entreferro em relação ao eixo da fase "a". Note que a espira está localizada em + ou -90° em relação a este eixo de referência. Note também que ele é diferente do ângulo θ que mostra a posição do rotor em relação a esta mesma referência.

Traçando, inicialmente, uma linha de integração qualquer como aquela mostrada na mesma Figura 4.3, a corrente total envolvida é zero, portanto a lei de Ampère pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (87)$$

Fazendo as considerações anteriores e supondo que a linha de integração passe em $\alpha = 0$ e $\alpha = \beta$ (para um β qualquer entre $\pm \pi/2$) tem-se:

$$H(0) \cdot g(0) - H(\beta)g(\beta) = 0 \quad (88)$$

A equação (88) mostra que o valor da fmm em $\alpha = 0$ é igual ao valor da fmm para qualquer outro β entre $-\pi/2$ e $\pi/2$.

Pode-se fazer outro caminho de integração envolvendo, desta vez, um condutor, como mostra a figura 4.4.

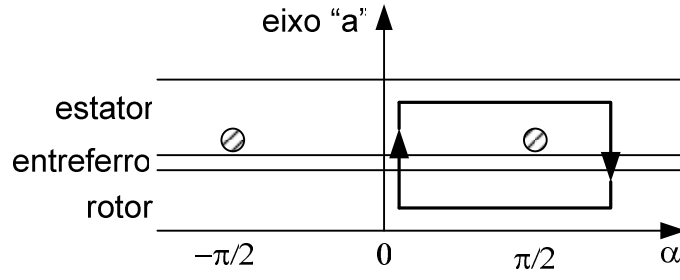


Figura 4.4: Novo caminho de integração

Evidentemente, neste caso, a integral de linha definida pela lei de Ampère será:

$$H(0).g(0) - H(\beta)g(\beta) = I \quad (89)$$

Onde I é corrente envolvida pela linha de intergração que corresponde ao valor da corrente no enrolamento. Este mesmo resultado é obtido para qualquer β entre $\pi/2$ e $3\pi/2$.

Para, finalmente, se determinar a forma de onda da fmm em função de α , basta conhecer o valor desta função em $\alpha = 0$. Para isto, lembrando a lei de Gauss que garante que o valor médio da densidade de fluxo no entreferro tem que ser igual a zero, uma vez que:

$$\int \vec{B}.d\vec{s} = 0 \quad (90)$$

Então, considerando a densidade de fluxo radial e a superfície cilíndrica do entreferro dada por:

$$ds = rld\alpha \quad (91)$$

Onde “ l ” é o comprimento longitudinal do cilindro e “ r ” o seu raio. Portanto, se a relutância é constante, o valor médio da fmm também deve ser nulo. Para atender às exigências impostas pelas leis de Ampère e Gauss, o valor da fmm em $\alpha = 0$ será:

$$fmm(0) = H(0).g(0) = I/2 \quad (92)$$

Portanto a forma de onda da fmm será a onda quadrada mostrada na figura 4.5.

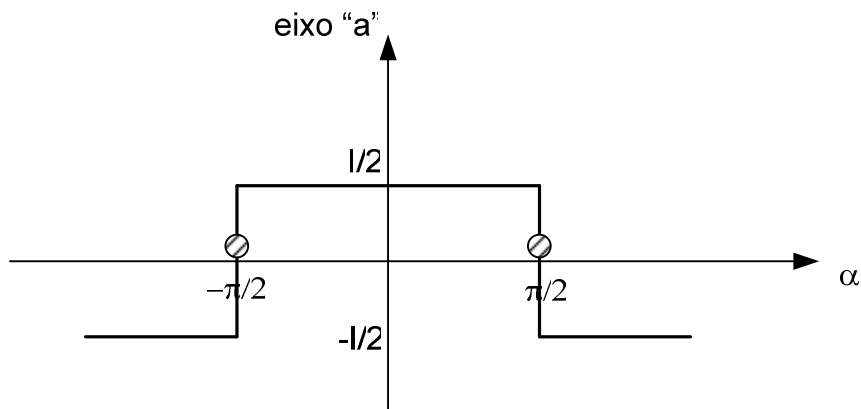


Figura 4.5: forma de onda da fmm produzida no entreferro por uma única espira.

Exemplo 17

Calcular a fmm levando em consideração os cinco enrolamentos distribuídos mostrados na Figura 1.

Solução

A forma de onda da fmm produzida por cada espira é idêntica àquela obtida no exemplo anterior. Somando cinco ondas quadradas superpostas, mantendo a suposição de linearidade do sistema, obtêm-se:

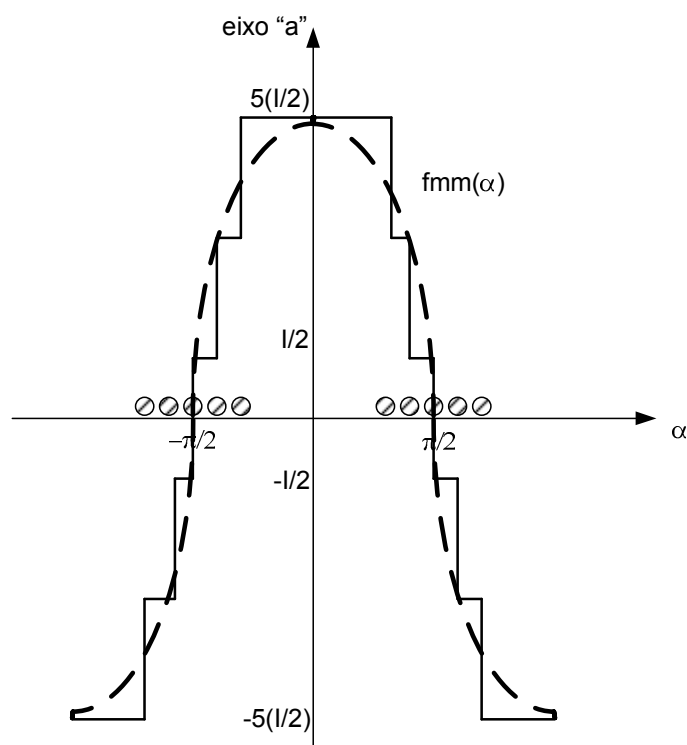


Figura 4.6: Forma de onda da fmm de enrolamentos distribuídos

A decomposição em série de Fourier desta onda é bastante simples e é fácil mostrar que com um projeto razoável, trabalhando-se com o tamanho das ranhuras, é possível fazer com que a onda se aproxime bastante de uma onda cosenoidal, ou seja, que as harmônicas superiores podem ser desprezadas.

$$fmm(\alpha) = fmm_1(\alpha) = F_{\max} \cos \alpha \quad (93)$$

Onde

$$F_{\max} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{Ni}{2} \quad (94)$$

O primeiro termo se deve à transformada de Fourier e o segundo é decorrência direta do que está mostrado na figura 4.6.

Para todos os efeitos, é muito razoável supor que a fmm seja uma função senoidal.

Exemplo 18

Supondo que a distribuição dos enrolamentos do rotor seja semelhante àquela do estator, determinar a matriz de indutância deste conversor.

Solução

É necessário determinar quatro valores de indutâncias, duas próprias e duas mútuas.

$$[L(\theta)] = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{aF} \\ L_{Fa} & L_{FF} \end{bmatrix} \quad (95)$$

Uma análise da figura mostra que as indutâncias próprias independem da posição do rotor uma vez que, seja qual for esta posição, a relutância vista por cada uma das bobinas será sempre predominantemente a relutância do entreferro que não se altera com a posição do rotor.

Por outro lado, a indutância mútua, evidentemente, depende da posição do rotor. Uma análise gráfica simples mostra que quando $\theta = 0$ rad, a indutância mútua será máxima e positiva uma vez que os eixos magnéticos estão alinhados. Quando $\theta = \pi$ rad, esta indutância será, mais uma vez máxima mas com o sinal negativo já que os eixos magnéticos estão em oposição de fase. Finalmente, quando $\theta = \pi/2$ ou $\theta = 3\pi/2$, o fluxo produzido por uma delas não concatena a outra já que os seus eixos estão perpendiculares, portanto, a indutância mútua nesta situação é nula. Com base nestas informações e lembrando que a distribuição espacial da fmm é senoidal, a expressão para a indutância mútua é dada por:

$$L_{aF} = L_{Fa} = M \cos \theta \quad (96)$$

4.2) Tensão Induzida

Exemplo 19

Suponha que o rotor seja alimentado por uma corrente contínua $i_F = I$ e que ele seja acionado a uma velocidade angular constante “ ω ”. Qual será a tensão nos terminais da bobina do estator se ele estiver em aberto?

Solução

Neste problema, a equação mecânica tem solução trivial uma vez que a velocidade é dada e é constante. Retomando a equação (84), obtém-se diretamente: $\Gamma_e = \Gamma_m$.

A resolução da equação elétrica é também muito simples uma vez que as duas correntes foram dadas no enunciado. A corrente do rotor igual a I , constante, e a corrente do estator igual a zero uma vez que ele está aberto.

Desta forma, como o que se quer é a tensão nos terminais do estator, tem-se:

$$v_a = r_a i_a + \frac{d}{dt} \lambda_a \quad (97)$$

$$\lambda_a = L_{aa} i_a + L_{aF} i_F \quad (98)$$

Juntando as duas equações e lembrando que $i_a = 0$:

$$v_a = \frac{d}{dt} L_{aF} i_F = IM \frac{d}{dt} \cos \theta \quad (99)$$

$$v_a = -IM\omega \sin \theta \quad (100)$$

Várias observações podem ser tiradas da equação (100). A primeira é que é muito fácil gerar uma tensão senoidal. Esta tensão é função da corrente de excitação (I), da geometria da máquina (M) e da frequência angular (ω). Observe que, em um dispositivo de velocidade constante, o controle de tensão depende exclusivamente da corrente de campo. Em muitas situações, se está interessado no valor rms da tensão, definindo, então E como o valor rms da tensão em vazio, tem-se:

$$E = \frac{IM\omega}{\sqrt{2}} \quad (101)$$

$$v_a = -\sqrt{2}E \sin \theta \quad (102)$$

A expressão (101) nada mais é do que a forma linear de representar a tensão gerada mostrada anteriormente. Como a mútua multiplicada pela corrente é, por definição, o fluxo concatenado com a bobina do estator, a expressão de E , considerando o sistema não linear, é dada por:

$$E = \frac{N\phi 2\pi f}{\sqrt{2}} = 4,44 N\phi f \quad (103)$$

Exemplo 20

Supondo que outros dois enrolamentos sejam acrescentados ao conversor da figura 4.1, de forma que os seus eixos magnéticos fiquem defasados de $2\pi/3$ radianos como mostra a figura 4.7. Quais seriam as tensões geradas em cada um destes enrolamentos supondo as mesmas condições do exemplo anterior.

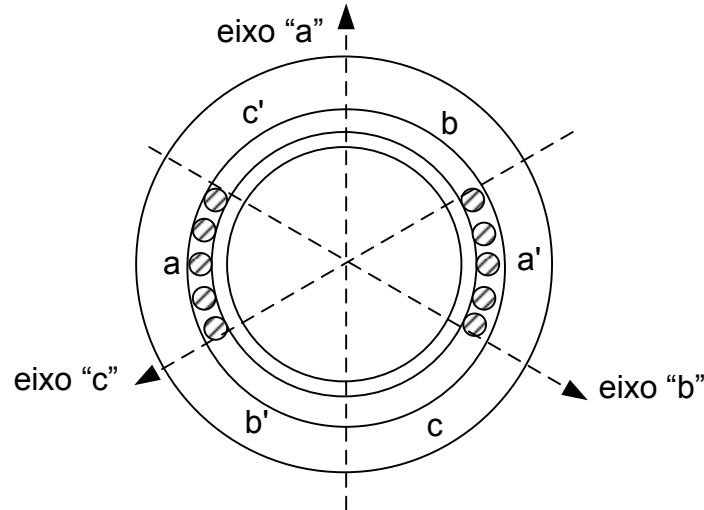


Figura 4.7: Conversor com três enrolamentos no estator

Solução

A equação mecânica continua com uma única solução trivial e a equação elétrica passa a ser de ordem 4 por que relaciona 4 bobinas. Como nos problemas anteriores, é fundamental determinar a variação da matriz de indutância em função da posição do rotor. Com as mesmas suposições feitas anteriormente observa-se que as únicas indutâncias que variam com a posição do rotor são as mútuas entre o estator e o rotor.

Com base na equação (95), obtém-se as outras indutâncias uma vez que a única alteração é posição da bobina em relação ao rotor:

$$\begin{aligned} L_{aF} &= L_{Fa} = M \cos \theta \\ L_{bF} &= L_{Fb} = M \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{cF} &= L_{Fc} = M \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (104)$$

Se o conversor está em vazio, então: $i_a = i_b = i_c = 0$.

Usando a equação elétrica e matricial do conversor com estas condições de contorno, fica muito simples calcular a corrente no campo.

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ -v_F \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r & & & \\ & r & & \\ & & r & \\ & & & r_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aF} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bF} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cF} \\ L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} & L_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \end{bmatrix} \quad (105)$$

Com todas as correntes do estator sendo nulas (máquina em vazio), a equação diferencial que define a corrente do campo é de primeira ordem:

$$-v_F = -r_F i_F - \frac{d}{dt} L_{FF} i_F \quad (106)$$

Note que o sinal da tensão v_F também foi alterado para caracterizar que este enrolamento em particular se mantém com a convenção motor.

A solução da equação (106) é trivial e considerando que um tempo razoável tenha decorrido, o valor da corrente i_F vai tender para:

$$i_F = \frac{v_F}{r_F} \quad (107)$$

Voltando, então, à equação (105), pode-se obter o valor das tensões nas três fases do estator. Calculando, inicialmente, para a fase “a”, tem-se:

$$v_a = -\frac{d}{dt} L_{aF} i_F = -\frac{d}{dt} M \cos \theta \cdot i_F \quad (108)$$

Sendo a corrente de campo e a indutância mútua dois valores constantes, basta diferenciar o cosseno θ em função do tempo.

$$v_a = M \omega i_F \sin \theta \quad (109)$$

Da mesma forma:

$$\begin{aligned} v_b &= M \omega i_F \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ v_c &= M \omega i_F \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (110)$$

Chamando de “E” o valor rms da tensão de fase em vazio, ou seja:

$$E = \frac{M \omega i_F}{\sqrt{2}} \quad (111)$$

As tensões em vazio nas três fases serão dadas por:

$$\begin{aligned}
v_a &= \sqrt{2}E \sin \theta \\
v_b &= \sqrt{2}E \sin(\theta - 2\pi/3) \\
v_c &= \sqrt{2}E \sin(\theta + 2\pi/3)
\end{aligned} \tag{112}$$

Usando uma notação fasorial tem-se:

$$\begin{aligned}
\overline{V}_a &= E \angle 0 \\
\overline{V}_b &= E \angle -120 \\
\overline{V}_c &= E \angle +120
\end{aligned} \tag{113}$$

É fácil observar que a tensão gerada em um dispositivo com estas características é trifásica e equilibrada.

Exemplo 21

Suponha que este conversor esteja ligado a uma carga trifásica equilibrada. Qual será a corrente que circulará em cada fase?

Solução

Uma carga trifásica equilibrada é aquela que pode ser representada por uma mesma impedância em cada fase. Se a impedância for dada pelo número complexo $\mathbf{Z} = Z/\phi$, então as correntes serão trifásicas e equilibradas.

$$\begin{aligned}
I_a &= \frac{E}{Z} \angle -\phi \\
I_b &= \frac{E}{Z} \angle -\phi - \frac{2\pi}{3} \\
I_c &= \frac{E}{Z} \angle -\phi + \frac{2\pi}{3}
\end{aligned} \tag{114}$$

Colocando estes fasores em sua representação no tempo, tem-se:

$$\begin{aligned}
i_a &= \sqrt{2} \frac{E}{Z} \sin(\omega t - \phi) = \sqrt{2} I \sin(\omega t - \phi) \\
i_b &= \sqrt{2} I \sin(\omega t - \frac{2\pi}{3} - \phi) \\
i_c &= \sqrt{2} I \sin(\omega t + \frac{2\pi}{3} - \phi)
\end{aligned} \tag{115}$$

Note que, se o rotor estiver rodando a uma velocidade angular ω , então a posição do eixo do rotor será dada por: $\theta = \omega t$. Para entender o comportamento da máquina é importante analisar o efeito conjunto das correntes para o fluxo resultante no entreferro.

4.3) Campo Magnético Girante

Exemplo 22

Qual será a força magnetomotriz produzida por estes três enrolamentos em conjunto?

Solução

Como foi visto nas equações (93) e (94), a distribuição espacial da força magnetomotriz é aproximadamente uma senoidal e é função do valor da corrente instantânea. Como os eixos das três fases estão defasados de $2\pi/3$, então a força magnetomotriz será dada por:

$$\begin{aligned}fmm_a &= \frac{4N}{2\pi} i_a \cos(\alpha) \\fmm_b &= \frac{4N}{2\pi} i_b \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) \\fmm_c &= \frac{4N}{2\pi} i_c \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3})\end{aligned}\tag{116}$$

O valor da corrente em cada fase é função do tempo e foi determinado na equação (115). Então:

$$\begin{aligned}fmm_a &= \frac{4N}{2\pi} \sqrt{2} I_{sen}(\omega t - \phi) \cos(\alpha) = K_{sen}(\omega t - \phi) \cos(\alpha) \\fmm_b &= K_{sen}(\omega t - \phi - \frac{2\pi}{3}) \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}) \\fmm_c &= K_{sen}(\omega t - \phi + \frac{2\pi}{3}) \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3})\end{aligned}\tag{117}$$

Observa-se que o valor máximo da fmm em cada fase varia com o tempo e este valor está centrado no eixo magnético de cada fase. Diz-se que é uma onda senoidal pulsante. A fmm resultante será a soma destes efeitos.

$$\begin{aligned}fmm_R &= fmm_a + fmm_b + fmm_c \\fmm_R &= \frac{3K}{2} \cos(\omega t - \alpha)\end{aligned}\tag{118}$$

O valor máximo da fmm resultante permanece constante e este valor aponta para diferentes valores de α a medida que o tempo passa. Diz-se que é uma onda senoidal trafegante.

4.4) Conjugado em máquinas rotativas

Exemplo 23

Calcular o conjugado da máquina elementar de dois enrolamentos mostrada na figura 4.1.

Solução

A solução é direta quando se supõe o sistema linear e a matriz de indutância é conhecida.

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} [i]^T \left\{ \frac{\partial [L(\theta)]}{\partial \theta} \right\} [i] \quad (119)$$

$$\frac{\partial [L(\theta)]}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} 0 & -M \sin \theta \\ -M \sin \theta & 0 \end{bmatrix} \quad (120)$$

Então:

$$\Gamma_e = -M i_1 i_2 \sin \theta \quad (121)$$

A interpretação da equação (121) é interessante. Quando as duas bobinas são excitadas (i_1 e i_2 diferentes de zero) o conjugado tende a alinhar os eixos magnéticos das duas bobinas. É natural uma vez que o conjugado, como foi visto, age sempre no sentido de diminuir a energia armazenada no campo. Quanto menor o entreferro menor será a energia armazenada. A indutância mútua (M), função do número de espiras de cada bobina e da relutância do caminho magnético, relaciona a influência das características físicas do conversor no valor do conjugado.

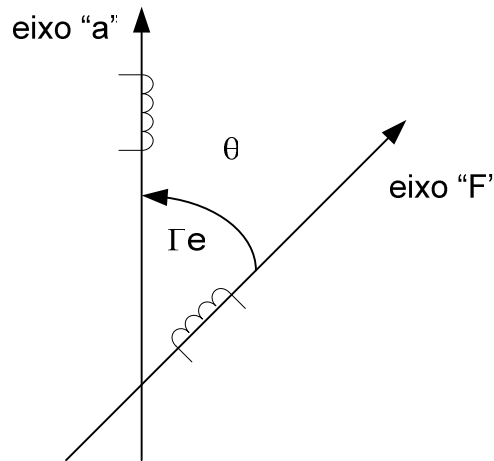


Figura 4.8: Representação esquemática do conjugado

É importante notar também que o valor médio da expressão (121) é, normalmente, igual a zero. O dispositivo mostrado na figura 4.1 não funciona como uma máquina.

Exemplo 24

Calcular o conjugado da máquina de 4 enrolamentos.

Solução

Usando a mesma expressão matricial:

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i_a & i_b & i_c & i_F \end{bmatrix} \left\{ \frac{\partial [L(\theta)]}{\partial \theta} \right\} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \end{bmatrix} \quad (122)$$

$$\frac{\partial [L(\theta)]}{\partial \theta} = -M \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\theta - 2\pi/3) \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}(\theta + 2\pi/3) \\ \text{sen}(\theta) & \text{sen}(\theta - 2\pi/3) & \text{sen}(\theta + 2\pi/3) & 0 \end{bmatrix} \quad (123)$$

Considerando a corrente nas três fases definidas pela equação (115) e fazendo a operação matricial, obtém-se:

$$\Gamma_e = 3\sqrt{2}MI_F \cos(\theta_0 + \phi) \quad (124)$$

Observa-se que a expressão (124) independe do tempo. Uma máquina trifásica produz um conjugado eletromagnético constante que é função das características da máquina (M), do carregamento (I e ϕ), da corrente de excitação (i_F) e da posição do rotor (θ_0).

A interpretação física é semelhante aquela do exemplo anterior. O campo magnético do estator (que está girando à velocidade síncrona) tenta se alinhar com o campo magnético do campo que roda à mesma velocidade. O conjugado atua para minimizar a energia armazenada no campo.

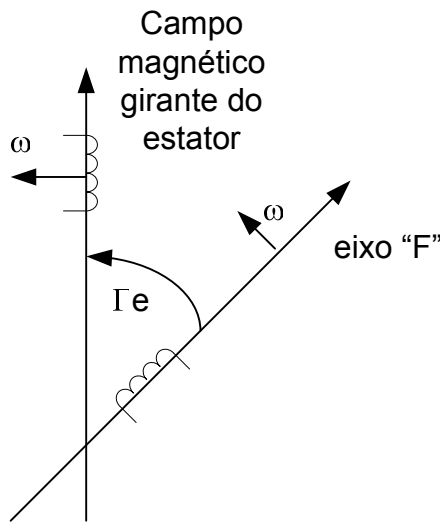


Figura 4.9: Representação esquemática do conjugado

MÁQUINAS DE CORRENTE CONTÍNUA

Ivan Camargo

Revisão 1 (maio de 2007)

1) Introdução

A máquina de corrente contínua é composta por um enrolamento de campo, geralmente colocado no estator, outro enrolamento no rotor, normalmente chamado de enrolamento de armadura, e um comutador composto por escovas e lâminas. A figura 1 mostra esquematicamente uma máquina de corrente contínua elementar.

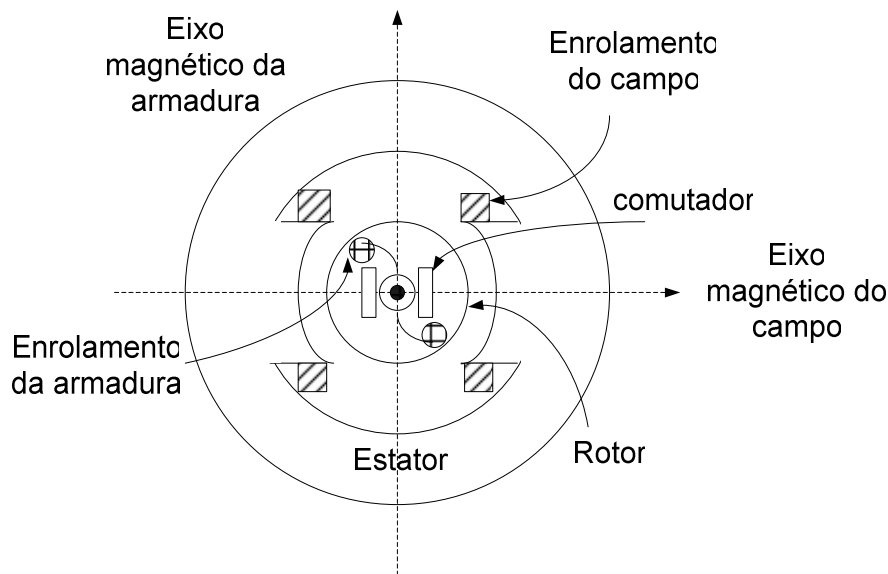


Figura 1: Máquina de corrente contínua elementar.

A máquina de CC elementar é caracterizada por um único enrolamento na armadura e é bastante útil para a introdução de conceitos básicos do funcionamento da máquina.

Exemplo 1

Considerando que o rotor da máquina elementar da figura 1 rode a uma velocidade angular constante " ω ", que o enrolamento de campo seja alimentado por uma corrente contínua i_F e que o enrolamento de armadura esteja em aberto, calcular a tensão gerada nos terminais do enrolamento da armadura.

Solução

Este problema já foi resolvido anteriormente, trata-se de duas bobinas acopladas e a tensão é dada pela lei de Faraday:

$$v_a = r_a i_a + \frac{d}{dt} \lambda_a$$

$$v_F = r_F i_F + \frac{d}{dt} \lambda_F$$
(1)

Onde:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{aF} \\ L_{Fa} & L_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_F \end{bmatrix}$$
(2)

O grande problema é a determinação da matriz de indutância. Neste problema específico, como a corrente de armadura é nula (o enrolamento está aberto) basta calcular a indutância mútua entre campo e armadura. É fácil notar que a força magnetomotriz produzida por uma corrente contínua no campo, é uma onda quadrada. Desta forma, o movimento circular da bobina no entreferro faz com que o fluxo concatenado com esta bobina se aproxime de uma senóide com o valor máximo ocorrendo quando os eixos se alinham e com valor nulo quando os eixos estão em quadratura. Assim:

$$L_{aF} = M \cos \theta$$
(3)

Substituindo-se (2) em (1) com a definição dada em (3) e lembrando que a posição relativa dos eixos $\theta = \omega t$:

$$v_a = -M \omega i_F \sin \theta$$
(4)

Observa-se que a tensão gerada é uma função senoidal, que depende do valor da corrente de campo (i_F), da geometria da máquina (M) e da frequência angular de rotação do rotor (ω).

O rotor da Figura 1 é redesenhado na Figura 2, abaixo, para detalhar o funcionamento do comutador.

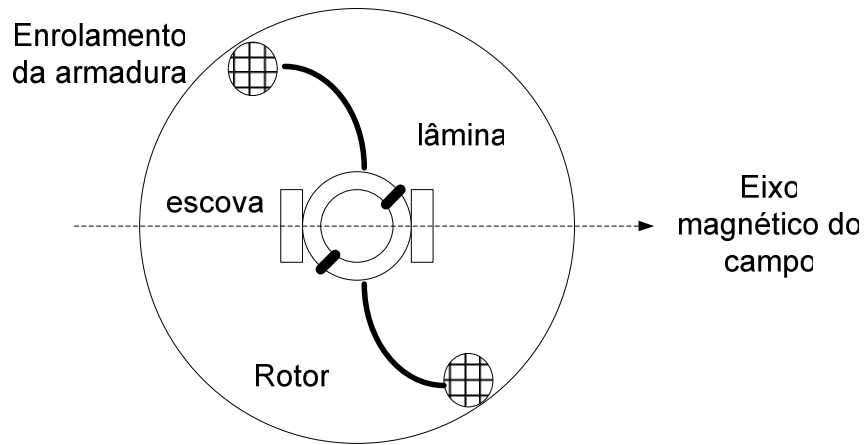


Figura 2: Detalhe do comutador

O comutador é composto lâminas de cobre, isoladas entre si e em contato com os enrolamentos da armadura. As lâminas acompanham o movimento de rotação do rotor da máquina. As escovas são normalmente feitas de grafite e estão fixas no estator, ou seja, com o movimento do rotor as lâminas deslizam sobre as escovas fazendo o contato da parte móvel da máquina com a parte estática.

Exemplo 2

Qual o valor da tensão nos terminais da escova, supondo as mesmas condições do exemplo anterior?

Solução

Foi visto que a forma de onda da tensão na bobina é uma senóide. A rotação do rotor faz com que, em cada meio ciclo, a polaridade do contato com a escova se inverta, assim, a tensão na escova será igual à tensão na bobina no primeiro meio ciclo e igual seu módulo (com sinal oposto) no meio ciclo seguinte. A Figura 3 mostra as duas tensões:

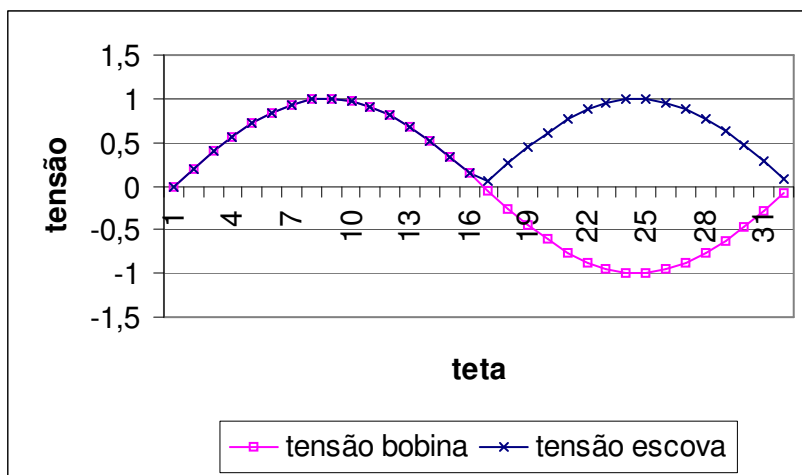


Figura 3: Tensão retificada na escova

Observa-se que o comutador retifica mecanicamente a forma de onda da tensão gerada.

Exemplo 3

Supondo que em vez de apenas uma bobina no rotor, esta máquina tivesse quatro bobinas, defasadas de $\pi/4$ rad, qual seria a tensão gerada nos terminais nos terminais da escova?

Solução

Tudo que ocorre na bobina 1, analisada anteriormente, ocorre também nas outras bobinas com uma defasagem de $\pi/4$. Plotando as senóides em função do tempo tem-se:

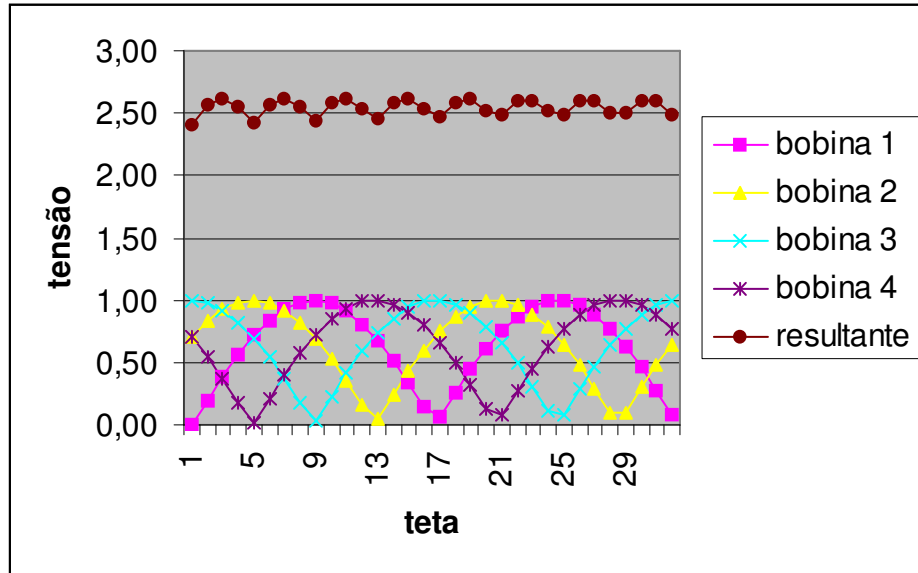


Figura 4: Tensão na escova devido aos enrolamentos distribuídos

Supondo que as bobinas estejam em série, o valor total da tensão será a soma da tensão em cada bobina. As figuras anteriores foram traçadas em planilha Excel.

Exemplo 4

Determinar o valor médio da tensão resultante.

Solução

O valor da tensão média em uma bobina é calculado de forma muito simples: é dado pela integral da função no período dividido pelo período (definição de valor médio).

$$E(1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v_a(\theta) d\theta \quad (5)$$

Usando a expressão da tensão em uma bobina obtida em (4), vem:

$$E(1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -M\omega_i \sin \theta d\theta \quad (6)$$

O sinal negativo da função senoidal desaparece pela ação do comutador. De fato, como foi visto no exemplo anterior, a forma de onda da tensão nas escovas é dada pelo valor absoluto da função senoidal. Desta forma, efetuando a integração:

$$E(1) = \frac{2}{\pi} M\omega_i \quad (7)$$

Considerando que se tenha N_a espiras na armadura, a tensão média nos terminais da armadura (E) será dada pela soma dos valores médios em cada bobina:

$$E = \frac{2}{\pi} N_a M \omega i_F \quad (8)$$

Observe que a indutância mútua “M” foi definida como o valor máximo do fluxo concatenado com uma bobina da armadura em relação ao fluxo produzido pelo campo, pode-se definir uma constante L_{AF} , com as mesmas características de uma indutância, que relacione o fluxo concatenado com as N_a bobinas e levando em consideração o efeito do comutador:

$$L_{AF} = \frac{2}{\pi} N_a M \quad (9)$$

Então:

$$E = L_{AF} \omega i_F \quad (10)$$

A tensão nos terminais da escova é proporcional à velocidade e à corrente de campo, além, é claro, das características físicas da máquina.

Exemplo 5

Obter uma expressão para a tensão em função do fluxo produzido pelo campo.

Solução

O fluxo concatenado com a bobina de armadura (quando ela está em vazio) é proporcional ao produto da indutância equivalente pela corrente de campo, ou seja:

$$k\phi_F = L_{AF} i_F \quad (11)$$

Então

$$E = k\phi_F \omega \quad (12)$$

Esta é a expressão que é encontrada com mais frequência nos livros didáticos. Ela é interessante por que não restringe a análise da máquina CC a problemas lineares. A não linearidade da curva de magnetização pode ser levada em consideração usando (12) em vez de (10).

Exemplo 6

Qual o conjugado produzido em uma bobina da armadura devido ao fluxo produzido pelo campo.

Solução

Supondo que uma corrente i_a circule pela armadura, tem-se, diretamente da definição do conjugado:

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} [i_a \quad i_F] \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} L_{aa} & M \cos \theta \\ M \cos \theta & L_{FF} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_a \\ i_F \end{bmatrix} \quad (13)$$

A rigor, a indutância própria L_{aa} é função da posição θ , uma vez que o entreferro não é constante. No entanto, este efeito será desprezado e, como será visto adiante, o comutador e os enrolamentos distribuídos da armadura de certa forma anulam este efeito.

Fazendo a derivada e o produto matricial obtém-se:

$$\Gamma_e(1) = -M i_a i_F \sin \theta \quad (14)$$

Vários problemas idênticos a este foram resolvidos anteriormente. O sinal negativo na expressão do conjugado significa que o conjugado tende a alinhar os dois eixos magnéticos. Considerando o sentido definido, nas próximas expressões este sinal será desconsiderado.

Exemplo 7

Calcular o conjugado médio que uma bobina é submetida ao longo de uma volta completa do rotor.

Solução

Como foi visto no exemplo anterior, o conjugado em cada bobina depende da sua posição. Como a bobina é composta por dois fios defasado π rad, basta calcular o valor médio para meio período, portanto:

$$\Gamma_e(\text{médio}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Gamma_e(1) d\theta \quad (15)$$

$$\Gamma_e(\text{médio}) = \frac{2}{\pi} M i_a i_F \quad (16)$$

Da mesma forma que foi feito para a tensão, o conjugado médio em N espiras da armadura será a soma do conjugado médio em cada bobina, então:

$$\Gamma_e = \frac{2}{\pi} N_a M i_a i_F \quad (17)$$

Usando a mesma definição de L_{AF} , tem-se:

$$\Gamma_e = L_{AF} i_a i_F \quad (18)$$

O conjugado é função dos dados construtivos da máquina, da corrente de armadura e da corrente de campo. Evidentemente, é possível colocar esta expressão em função do fluxo:

$$\Gamma_e = k \phi_F i_a \quad (19)$$

Observe que a constante que multiplica o fluxo na tensão da armadura e no conjugado é a mesma. Esta mesma conclusão poderia ser obtida diretamente da definição de conservação de energia, de fato, dividindo a equação (12) pela equação (19) tem-se:

$$\frac{E}{\Gamma_e} = \frac{\omega}{i_a} \quad (20)$$

ou

$$E i_a = \Gamma_e \omega \quad (21)$$

Ou seja, no conversor eletromagnético ideal a potência elétrica de entrada é convertida em potência mecânica no eixo.

2) Funcionamento do Comutador

A Figura 5 mostra o rotor de uma máquina de corrente contínua, com oito bobinas distribuídas ao longo de oito ranhuras (com duas barras por ranhura).

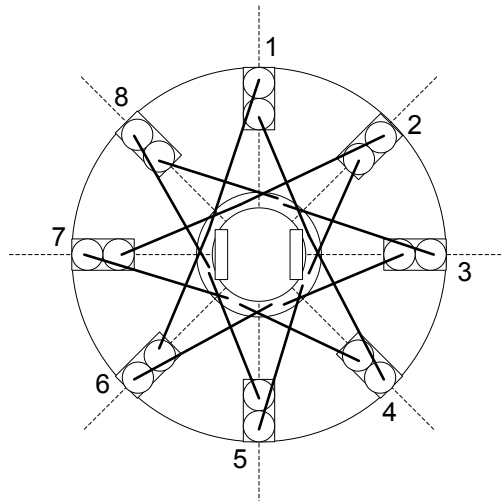


Figura 5: Funcionamento do comutador

A Figura 5 exige alguns esclarecimentos: existem oito lâminas, isolada entre si, no eixo do rotor; cada barra é conectada a uma lâmina; os barramentos inferiores são conectados (por trás da figura) aos superiores diametralmente opostos. As escovas são normalmente posicionadas externamente às lâminas, para maior clareza da figura elas foram colocadas internamente.

Exemplo 8

Se uma fonte de corrente i_a é injetada na escova da direita, determinar a circulação desta corrente ao longo das bobinas da armadura.

Solução

A Figura 6 mostra a circulação da corrente.

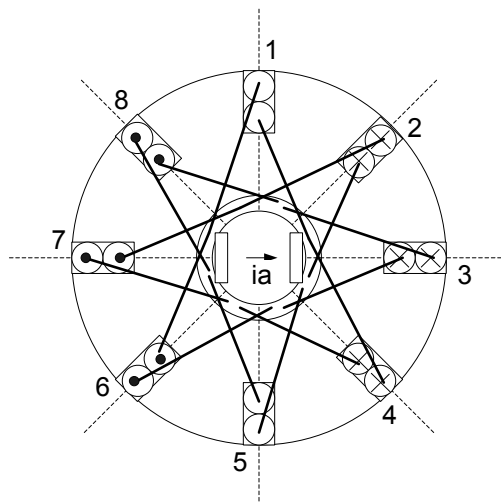


Figura 6: Distribuição da corrente

Observe que os barramentos das ranhuras 1 e 5 estão curto-circuitados pelas escovas. Observe também que a corrente está no sentido de entrar no papel no lado direito da figura (marcado como um “x”) e sair no lado esquerdo (marcado com um ponto). O efeito resultante desta corrente é o de uma força magnetomotriz ortogonal àquela produzida pelo campo.

Exemplo 9

Repita o procedimento considerando que uma pequena rotação ($\pi/8$) seja dada no rotor, ou seja, que a escova fique em contato com apenas uma lâmina.

Solução

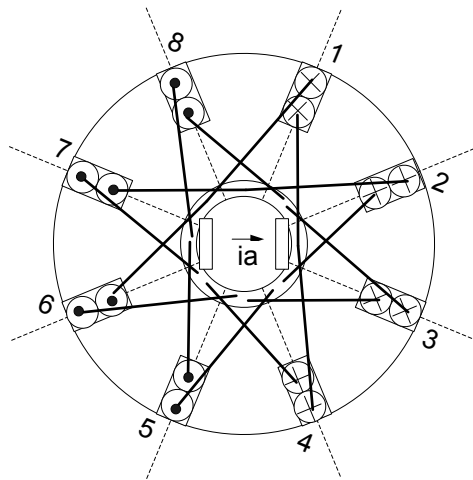


Figura 7: Comutador em rotação

O valor da corrente na bobina da ranhura 1 passou de zero para i_a . Repetindo o procedimento, a corrente na bobina da ranhura 2 vai passar de i_a entrando no papel (que se pode convencionar como negativo) para i_a saindo do papel neste $1/16$ de ciclo. A forma de onda da corrente em uma bobina durante a comutação, considerando que esta ocorra de forma linear é mostrada na Figura 8.

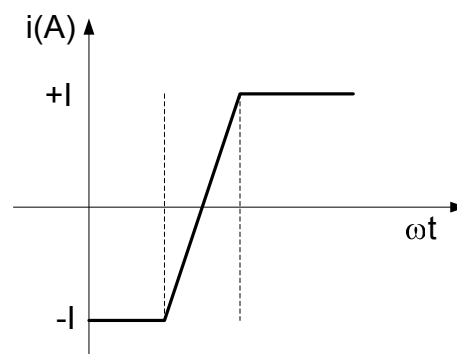


Figura 8: Período de comutação

O período de comutação (ou tempo de comutação) depende basicamente da velocidade de rotação do rotor, ou seja, do tempo de contato da escova com a lâmina. A taxa de variação da corrente na bobina depende da indutância da bobina. Nem sempre os dois valores são iguais. Em algumas situações a escova perde o contato com a lâmina antes da corrente ter atingido o seu valor final. Neste caso ocorre o faiscamento no comutador. Esta ocorrência danifica a escova aumentando a necessidade de manutenção desta máquina. Além disto, por este motivo, a utilização deste motor em ambientes “explosivos” é fortemente desaconselhada.

3) Circuito Equivalente da Máquina de Corrente Contínua

Foi deduzido nos itens anteriores as equações principais da máquina de corrente contínua. Observou-se que a rotação do rotor produz na armadura uma tensão proporcional à velocidade e ao campo produzido pelo enrolamento do estator. Por outro lado, a corrente que circula no enrolamento da armadura não induz nenhuma queda de tensão no campo por que, por efeito do comutador, o fluxo produzido por ela está sempre ortogonal ao enrolamento de campo. A equação elétrica das duas bobinas pode ser colocada, então da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a & 0 \\ 0 & r_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} pL_{aa} & L_{AF}\omega \\ 0 & pL_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_F \end{bmatrix} \quad (22)$$

Onde o operador “p” foi colocado no lugar do operador diferencial “d/dt”.

Esta equação pode ser bastante simplificada considerando o sistema em regime permanente. Considerando que as correntes são constantes, a sua variação com o tempo é nula, portanto:

$$v_a = r_a i_a + E \quad (23)$$

$$v_F = r_F i_F \quad (24)$$

A equação mecânica é dada por:

$$\Gamma_e - \Gamma_m = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} \quad (25)$$

Onde “J” é a constante de inércia do rotor somado à carga que ele está acionando, “B” é coeficiente de atrito dos mancais (que normalmente pode ser desprezado), Γ_m é o conjugado mecânico da carga e o conjugado elétrico (Γ_e) é obtido a partir do cálculo das correntes e é dado por:

$$\Gamma_e = L_{AF} i_a i_F \quad (26)$$

Em regime permanente, com velocidade constante, a equação mecânica se reduz a:

$$\Gamma_e = \Gamma_m \quad (27)$$

Descrever as equações (23) e (24) através de um circuito equivalente é muito simples, basta considerar uma fonte de tensão controlada em função da velocidade (E). A Figura 9 mostra este diagrama.

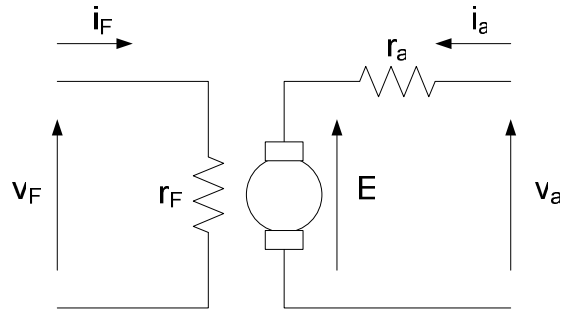


Figura 9: Circuito Equivalente do motor de corrente contínua

Todas as deduções foram feitas considerando que as bobinas tivessem um comportamento de uma carga, ou seja, o conversor funcionando como motor. É fácil observar na Figura 9 que a potência ativa positiva é aquela que está sendo injetada no motor. Para considerar como positiva a potência elétrica que sai do motor (convenção gerador), basta inverter o sentido positivo da corrente. Para que não haja confusão a corrente de armadura considerada positiva saindo do gerador será chamada i_g .

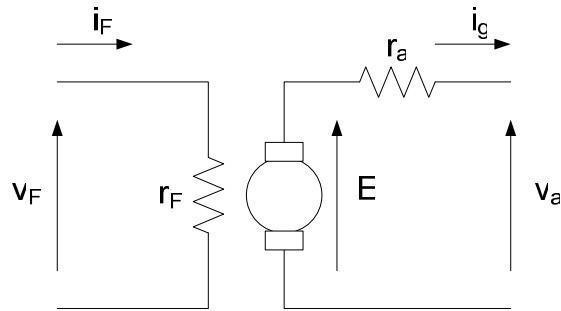


Figura 10: Circuito Equivalente do Gerador de Corrente Contínua em Regime Permanente

A equação de tensão da armadura, com esta mudança de convenção, fica:

$$V = E - r_a i_g \quad (28)$$

Exemplo 10

Se um gerador CC for acionado mecanicamente a uma velocidade constante ω_0 , e a corrente de campo for variada de 0 até o seu valor máximo, qual será a tensão medida nos terminais da armadura se esta estiver em vazio?

Solução

Se o gerador está em vazio, então ($i_a = 0$):

$$V = E \quad (29)$$

A equação (10) mostra que a tensão interna (E) é proporcional à corrente de campo quando a velocidade for constante.

$$E = L_{AF} \omega_0 i_F \quad (30)$$

Esta proporcionalidade só é válida quando o circuito magnético não estiver saturado. A equação (12) mostra que a tensão é proporcional ao fluxo e que, o aumento da força magnetomotriz não implica em aumento no fluxo quando o material está saturado.

$$E = k \phi_F \omega_0 \quad (31)$$

Assim, a relação entre a tensão terminal e a corrente de campo será muito parecida com a curva de magnetização do material e é mostrada na Figura (11).

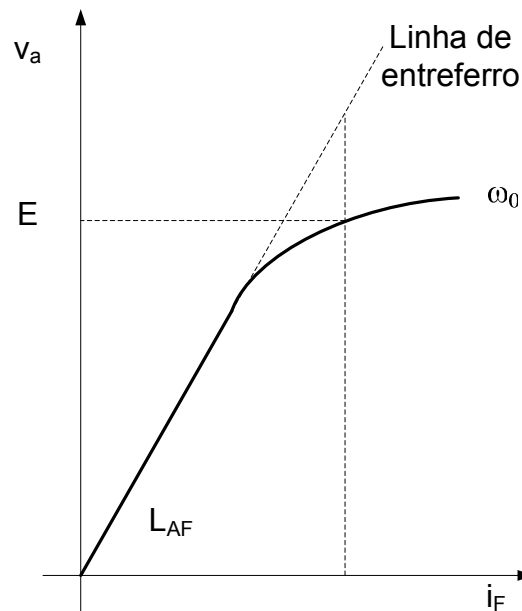


Figura 11: Curva de Magnetização da Máquina de Corrente Contínua

O trecho linear da curva é chamado de “linha de entreferro”. O coeficiente L_{AF} definido anteriormente pode ser facilmente obtido através deste ensaio.

Exemplo 11

Foi feito o ensaio em vazio, a uma velocidade de 200 rad/s em uma máquina CC e, para uma corrente de campo $i_F = 5$ A, obteve uma tensão terminal igual a $V = 200$ V. Qual a velocidade que a máquina estará rodando se for aplicada uma tensão de 200 V em seus terminais e, mantendo as mesmas condições do campo, a corrente de armadura medida for de 2 A. Considerar que a resistência de armadura seja igual a 5Ω .

Solução

Da equação de tensão (23) do motor em regime permanente, tem-se diretamente:

$$E = V - r_a I_a = 200 - 10 = 190V \quad (32)$$

Como

$$E_0 = k\phi_F \omega_0 \quad (33)$$

$$k\phi_F = 1 \text{ Vs / rad} \quad (34)$$

Portanto:

$$\omega = \frac{E}{k\phi_F} = 190 \text{ rad / s} \quad (35)$$

De uma forma geral, quando não há variação do fluxo em uma determinada condição do campo:

$$\frac{E}{\omega} = \frac{E_0}{\omega_0} \quad (36)$$

4) Tipos de Máquinas de acordo com o seu enrolamento de excitação

Como, tanto a tensão de armadura quanto a tensão do campo são tensões CC, em muitas situações pode-se usar a mesma fonte para alimentar os dois enrolamentos. Dependendo de como estes enrolamentos forem ligados a máquina de CC pode ser:

4.1) Com Excitação em separado

A Figura 10 mostra o esquema das ligações para a excitação em separado e as equações de tensão são dadas por:

$$v_a = r_a i_a + E \quad (37)$$

$$v_F = r_F i_F \quad (38)$$

A característica desta máquina é que o campo é independente da armadura.

4.2) Com Excitação em Série

O enrolamento de campo está em série com o enrolamento de armadura como mostra a Figura 12.

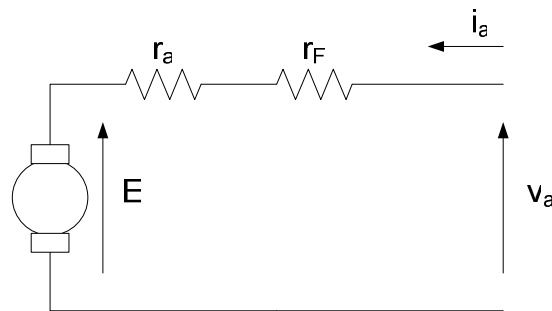


Figura 12: Motor com excitação em série

As equações em regime permanente são obtidas diretamente da figura e são dadas por:

$$i_a = i_F \quad (39)$$

$$v_a = (r_a + r_F) i_a + E \quad (40)$$

Como o enrolamento de campo está em série com a armadura, grandes correntes passam pelo campo. Este enrolamento é caracterizado por baixa resistência. Normalmente é feito com poucas espiras e com fio razoavelmente grosso.

4.3) Com Excitação em paralelo

O enrolamento de campo está em paralelo com o enrolamento de armadura como mostra a Figura 13.

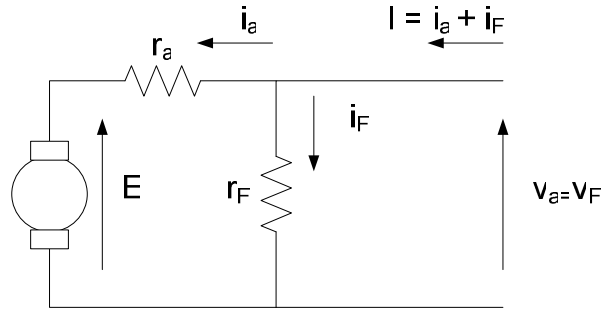


Figura 13: Máquina CC com excitação em paralelo

As equações são obtidas diretamente do esquema da Figura 13.

$$I = i_a + i_F \quad (41)$$

$$v_a = v_F = r_a i_a + E = r_F i_F \quad (42)$$

Como o enrolamento de excitação está em paralelo com a armadura, para que uma corrente pequena circule por ele, sua construção é feita com muitas espiras e alta resistência.

4.4) Com excitação composta

A excitação composta é feita com enrolamento série e outro em paralelo. Os fluxos dos dois enrolamentos podem se somar no entreferro (composta ADITIVA) ou se subtrair (composta SUBTRATIVA). Por outro lado, visto dos terminais da máquina, o enrolamento de campo série pode estar depois do enrolamento paralelo (composta LONGA) ou antes (composta CURTA). As equações em regime permanente de cada um destes modelos podem ser facilmente obtidas a partir dos seus respectivos diagramas. Estas equações serão mostradas em exemplos específicos.

Finalmente, as máquinas CC podem ser excitadas por um ímã permanente, neste caso, a máquina se comporta como uma excitação independente. Normalmente estas máquinas são pequenas.

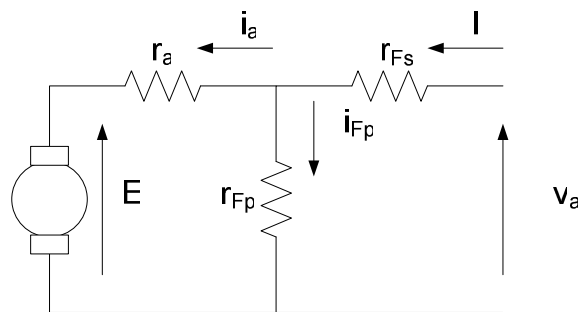


Figura 14: Excitação composta (curta)

5) Características de Operação do Gerador de Corrente Contínua

As características de operação de um gerador de CC dependem basicamente da conexão dos seus enrolamentos. Em geral, quando se analisa um gerador de CC, supõe-se que a sua fonte de energia mecânica mantenha uma velocidade constante. Desta forma, não tem sentido analisar a equação mecânica já que a sua solução é um dado do problema e o que se deseja é verificar como a tensão terminal varia com o aumento da carga.

É preciso ficar claro que a variação da carga, pela própria definição, é um processo dinâmico. A análise da variação da carga em regime permanente é uma simplificação considerando que em cada ponto a máquina fique um tempo suficientemente grande em relação às constantes de tempo elétricas da máquina.

Exemplo 12

Determinar a tensão terminal de um gerador CC com excitação independente supondo que sua carga passe de zero ao seu valor nominal.

Solução

Trata-se de um exemplo semelhante ao exemplo 10 variando a corrente de armadura em vez da corrente de campo. Para um determinado valor de corrente de campo a tensão terminal é dada pela curva de magnetização da máquina (Figura 11).

A corrente de armadura altera a tensão terminal em três aspectos:

- a) queda de tensão resistiva;
- b) queda de tensão nas escovas; e
- c) queda de tensão devido à reação da armadura.

A primeira e a segunda são conseqüências diretas da equação de tensão.

$$V = E - r_a i_a \quad (43)$$

Onde r_a pode incluir os efeitos da queda de tensão nas escovas. Alguns autores preferem representar a queda de tensão nas escova por um valor constante, independente da corrente, neste caso a equação de tensão ficaria:

$$V = E - r_a i_a - e_{esc} \quad (44)$$

Onde e_{esc} é a queda de tensão devido às escovas.

O terceiro aspecto se refere à distorção do fluxo de campo devido ao fluxo produzido pela armadura. A Figura 14 mostra esquematicamente o que ocorre.

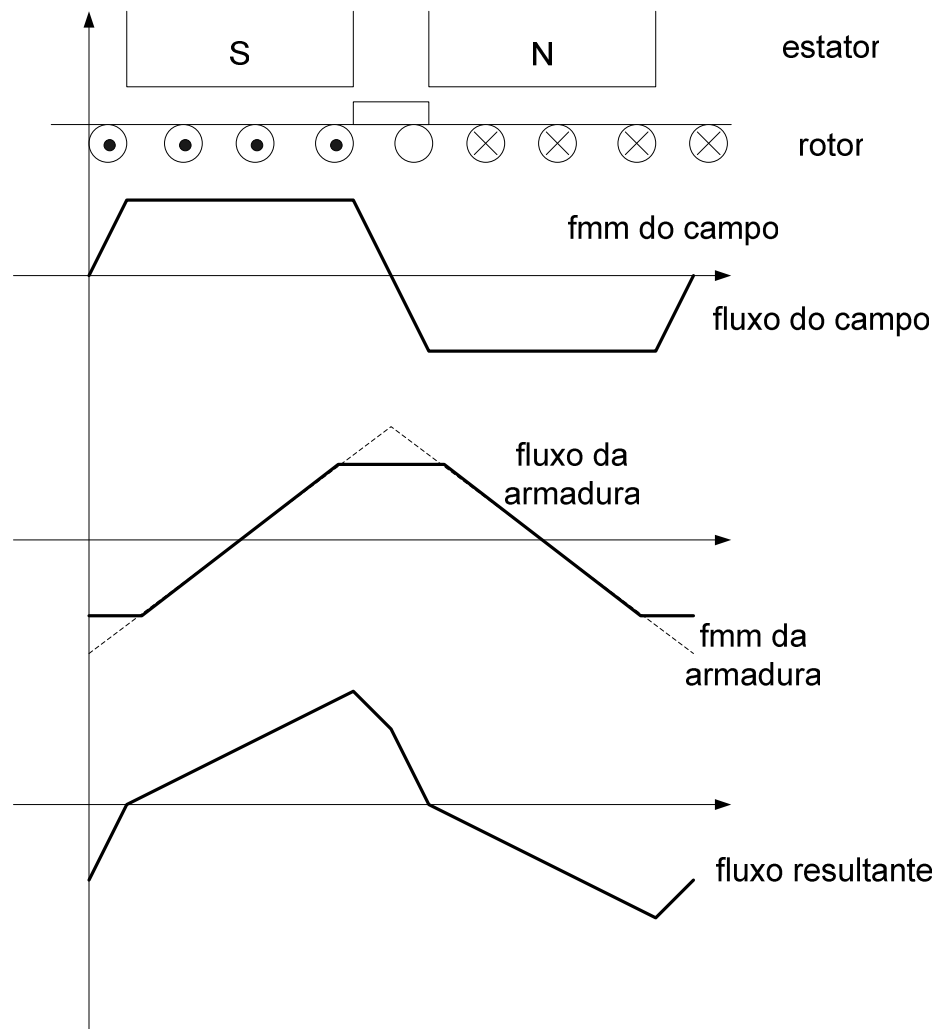


Figura 15: Efeito da Reação da Armadura

Algumas explicações para a Figura 14: a força magnetomotriz produzida pelo campo é uma onda trapezoidal. O fluxo é semelhante uma vez que o entreferro visto do estator é constante. A fmm produzida pela armadura tem forma triangular. O fluxo produzido é maior nas regiões de menor relutância, ou seja, nos pólos do estator. O fluxo resultante seria a soma linear do fluxo do campo e da armadura se o sistema fosse linear. Como o material ferromagnético é não linear, dependendo dos níveis de corrente no campo e na armadura, pode haver a saturação e o fluxo resultante ficar reduzido devido ao efeito da reação da armadura.

De qualquer forma, a reação da armadura produz um deslocamento da curva de fluxo resultante em relação ao eixo magnético da armadura. Como foi visto anteriormente, é interessante que o fluxo passe por zero na região da escova para que a comutação (ou o curto-circuito entre as espiras de uma bobina) ocorra em tensão nula. Isto prejudica a comutação. Em algumas máquinas, para contornar este efeito, são instalados enrolamentos entre os pólos (alimentada pela corrente de armadura).

Levando-se em consideração estes efeitos a curva relacionando tensão terminal com corrente de carga (para velocidade e corrente de campo constantes) é mostrada na Figura 15.

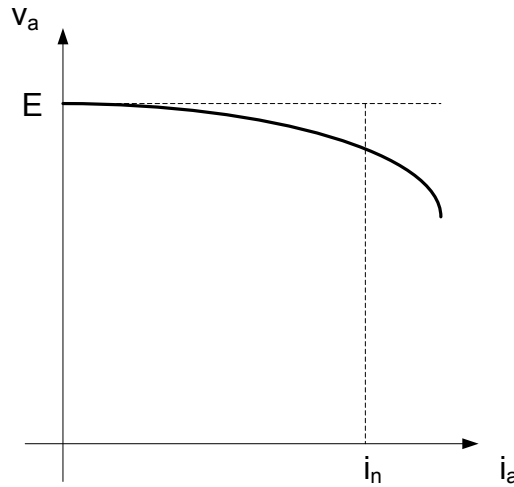


Figura 15: Tensão terminal em função da corrente de carga

Exemplo 13

Se um gerador, com excitação em paralelo, for acionado a uma velocidade constante ω_0 , qual será a tensão em seus terminais em regime permanente e em aberto.

Solução

O caso do gerador com excitação em paralelo é diferente já que, a princípio o fluxo do campo depende da tensão gerada que, por sua vez, depende do fluxo do campo.

$$E = k\phi_F\omega \quad (45)$$

e

$$i_F = \frac{v_a}{r_F} \quad (46)$$

Como foi visto nos exemplos anteriores, em vazio a tensão terminal $v_a = E$, portanto inicialmente igual a zero fazendo que i_F também seja igual a zero e o fluxo de campo permaneça inalterado.

No entanto, se houver um fluxo residual no campo $\phi_F(0)$, com a aceleração do gerador este fluxo geraria uma pequena tensão nos terminais do enrolamento de campo que produziria uma corrente de campo que (se estiver na mesma polaridade do fluxo residual) aumenta o fluxo que aumenta a tensão e aumenta a corrente até o processo se estabilizar em um ponto onde a curva de magnetização cruzar a curva relacionando corrente de campo com tensão

terminal, ou seja, uma reta cuja inclinação é r_F . A Figura 16 ilustra este processo que é chamado de ESCORVAMENTO do gerador de corrente contínua.

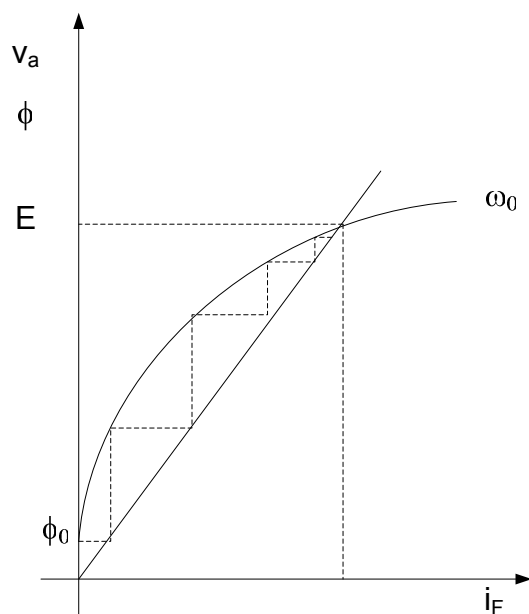


Figura 16: Escorvamento do gerador de corrente contínua com excitação em paralelo

Observe que se a resistência do enrolamento de campo for muito grande não haverá escorvamento. O máximo valor da resistência de campo é aquele que iguala a inclinação da linha de entreferro- alguns autores chamam esta resistência de CRÍTICA. Além disto, a característica de tensão terminal em função da corrente de carga é semelhante àquela mostrada para excitação independente. A única diferença é que o aumento da corrente produzindo redução na tensão terminal, produz também redução no fluxo que implica em redução na tensão interna (E).

Exemplo 14

Determinar a característica de tensão terminal em função da corrente de carga para um gerador composto.

Solução

A característica $V \times I$ de um gerador CC composto depende do número de enrolamentos de campo em série e em paralelo. Se o enrolamento de campo for basicamente um enrolamento em paralelo a característica será parecida com aquela mostrada na Figura 15. No entanto, o enrolamento de campo série pode compensar a queda de tensão produzida pela reação da armadura aumentando o fluxo total do campo. De fato, a tensão interna de uma máquina composta aditiva é dada por:

$$E = k(\phi_F(série) + \phi_F(paralelo))\omega \quad (47)$$

O número de bobinas no enrolamento série pode ser calculado de forma a compensar as quedas de tensão devido à resistência e à reação da armadura. Neste caso a máquina é chamada de composta plana (ou “*flat compound*”). Se houver mais bobinas no enrolamento série ela será chamada de super composta (ou “*over compound*”) e se houver menos será chamada de subcomposta (ou “*under compound*”). A característica do gerador composto subtrativo é pior do que a do gerador paralelo simples. Estas características estão mostradas na Figura 17.

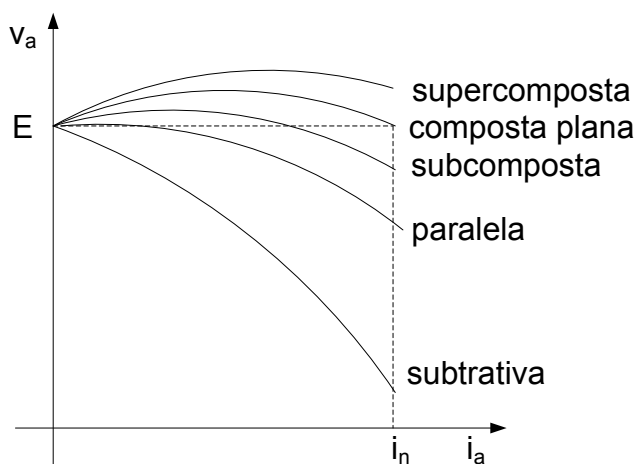


Figura 17: Característica $V \times I$ dos geradores CC com excitação composta

Convém notar que se o que se espera de um bom gerador é que ele mantenha uma tensão constante nos seus terminais independente da carga, a melhor configuração para um gerador CC é a composta plana.

Exemplo 15

Determinar a característica $V \times I$ para um gerador com excitação em série.

Solução

A característica principal da máquina CC série é que a corrente de carga é igual a corrente de campo. Em vazio, portanto, não haveria fluxo no campo nem tensão nos terminais do gerador. Pode-se considerar que haja um fluxo residual na máquina, neste caso, quando a máquina for acionada na sua velocidade nominal haverá uma pequena tensão nos seus terminais. O aumento da carga provocará um aumento na corrente de campo que é responsável pelo fluxo, assim a característica de tensão em função da corrente de armadura (de carga ou de campo) do gerador CC série será muito parecida com a sua curva de magnetização. Note que depois do seu valor nominal, o aumento da corrente não provoca aumento no fluxo devido a saturação e os efeitos de queda de tensão devido às resistências e a reação da armadura se acentua fazendo com que a tensão terminal diminua com a corrente. A Figura 18 mostra esta característica.

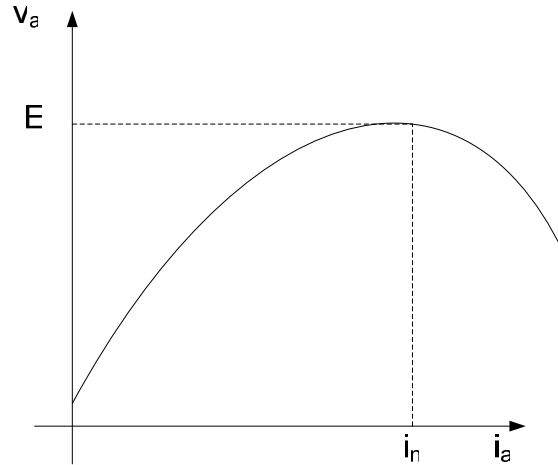


Figura 18: Característica V x I para o gerador CC série

Observa-se que um gerador com esta característica só deve ser usado em condições muito particulares.

6) Característica de Operação do Motor de Corrente Contínua

Ao contrário do gerador, o motor de corrente contínua, normalmente é alimentado por uma fonte de tensão constante e a característica que mais interessa é o comportamento da sua velocidade em função do aumento da carga mecânica. Note que em regime permanente o conjugado mecânico é sempre igual ao elétrico (Equação (27)).

Exemplo 16

Traçar a curva do conjugado em função da velocidade para um motor com excitação em separado.

Solução

Considerando a tensão da fonte constante, a corrente de armadura vai depender exclusivamente da velocidade. O conjugado é função da corrente de armadura portanto será uma função linear da velocidade. Se a fonte de tensão é constante, a característica do motor com excitação independente é idêntica ao com excitação em paralelo. Desta forma vai-se considerar que $v_F = V$. O conjugado em função da velocidade é dado por:

$$\Gamma_e = L_{AF} i_F i_a \quad (48)$$

$$i_a = \frac{V - E}{r_a} \quad (49)$$

$$E = L_{AF} \omega i_F \quad (50)$$

$$i_F = \frac{V}{r_F} \quad (51)$$

Substituindo nas equações anteriores, tem-se:

$$i_a = \frac{V}{r_a} \left\{ 1 - \frac{L_{AF} \omega}{r_F} \right\} \quad (52)$$

$$\Gamma_e = \frac{L_{AF} V^2}{r_a r_F} \left\{ 1 - \frac{L_{AF} \omega}{r_F} \right\} \quad (53)$$

A curva está mostrada na Figura 19.

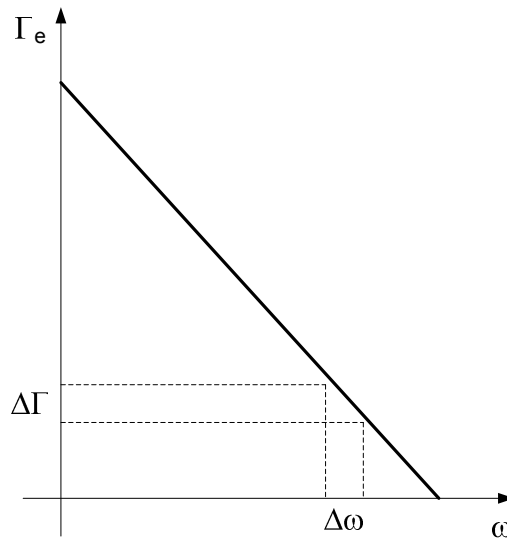


Figura 19: Característica conjugado e corrente em função da velocidade

As equações (52) e (53) permitem tirar muitas conclusões. A declividade da curva é negativa. Isto é muito importante porque caracteriza um comportamento estável da máquina. De fato, um aumento da carga mecânica produzirá uma redução da velocidade (em função da equação mecânica (25)). Esta redução da velocidade provoca aumento na corrente e no conjugado elétrico que se equilibra com o mecânico em um outro ponto de operação. Além disto, a declividade é muito grande (função do quadrado da tensão aplicada), desta forma a sua operação normal pode ser considerada como a velocidade aproximadamente constante. Finalmente observa-se que a corrente de partida é muito grande, limitada apenas pela resistência da armadura, portanto em geral, são necessários mecanismos especiais para partida de motores de corrente contínua.

Exemplo 18

Traçar a curva do conjugado em função da velocidade para um motor de corrente contínua com excitação em série.

Solução

No caso do motor CC série as equações ficam:

$$i_a = i_F = I \quad (54)$$

$$I = \frac{V}{r_a + r_F + \omega L_{AF}} \quad (55)$$

$$\Gamma_e = L_{AF} I^2 \quad (56)$$

$$\Gamma_e = \frac{L_{AF} V^2}{(r_a + r_F + \omega L_{AF})^2} \quad (57)$$

Cuja curva é mostrada na Figura 20.

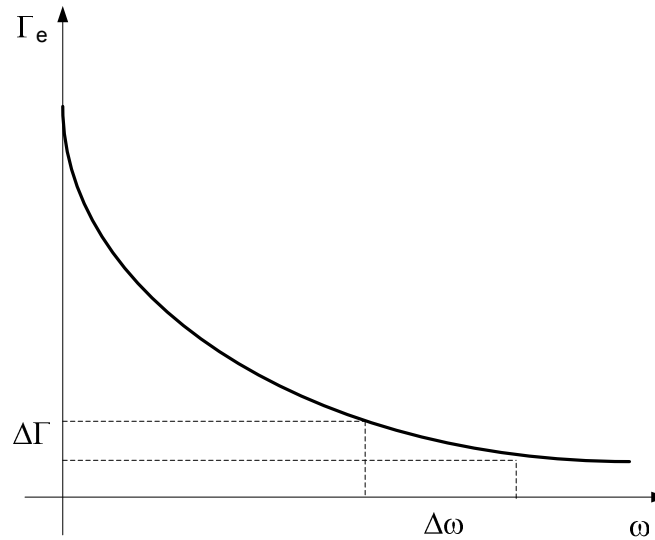


Figura 20: $\Gamma \times \omega$ para um motor CC série

Algumas conclusões importantes podem ser tiradas da Figura 20. O motor série tem um alto conjugado de partida já que a corrente é muito grande e o conjugado é proporcional ao seu quadrado. A corrente de partida deve também ser limitada. A velocidade é altamente variável com a carga. Este tipo de máquina não pode operar em vazio – se o conjugado mecânico for para zero a velocidade tende a infinito.

Uma aplicação usual para este tipo de motor é na tração elétrica. Observe que as características são favoráveis: alto conjugado de partida e nunca opera sem carga (a carga mínima é o vagão do trem sem passageiros).

7) Análise do Rendimento de uma máquina de corrente contínua

O circuito equivalente da máquina de corrente contínua representa corretamente o funcionamento da máquina em regime permanente considerando, inclusive, as perdas elétricas nos enrolamentos de campo e de armadura.

As perdas mecânicas se devem basicamente ao atrito nos mancais e nas escovas e a ventilação.

Em algumas situações, convém levar em consideração as perdas chamadas de suplementares referentes à corrente de Foucault e a distorções na forma de onda do fluxo. Estas perdas, tipicamente, podem chegar a 1% da potência de saída.

A Figura 21 mostra, esquematicamente, as perdas em um gerador CC.

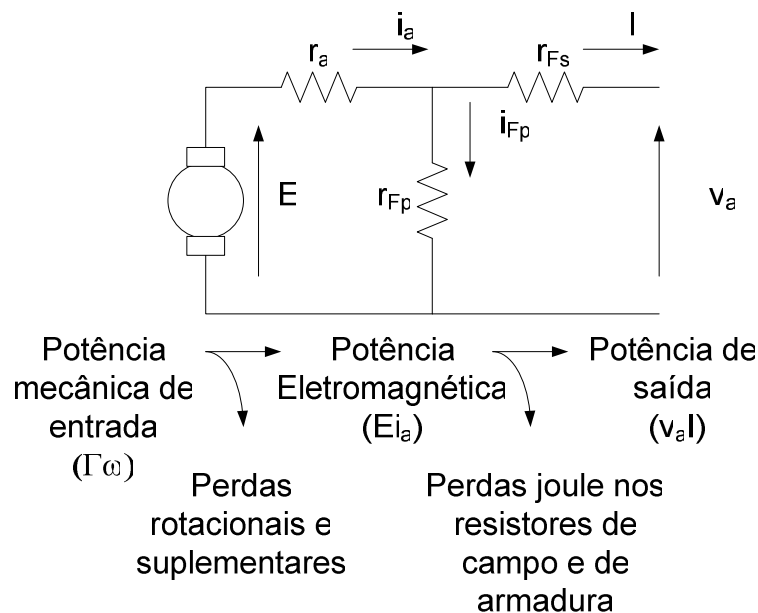


Figura 21: Diagrama das perdas em um gerador CC

O diagrama do motor é idêntico invertendo-se a entrada e a saída. Em qualquer caso o rendimento é dado por:

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (58)$$

Exemplo 19

Dada a curva de magnetização a 1800 rpm de um motor CC “*shunt*” de 25 HP, 250 V, 84 A. A resistência de campo é de $184 \, \Omega$, a resistência de armadura de $0,082 \, \Omega$. O campo tem 3000 espiras. O efeito desmagnetizante da reação da armadura é de 0,09 A em função da corrente de campo. As perdas rotacionais em vazio são de 1.300 W e as perdas suplementares correspondem a 1% da potência de saída. Calcular:

- a) a velocidade do motor quando $I = 84 \, \text{A}$;
- b) a potência eletromagnética;
- c) a potência de saída;
- d) o conjugado de saída; e
- e) o rendimento do motor.

Solução

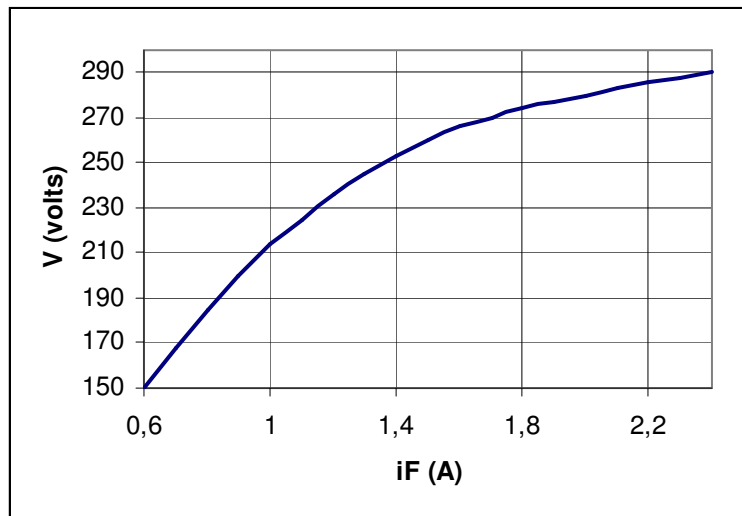


Figura 22: Curva de magnetização do motor do exemplo 19

É dada a corrente e a tensão aplicada, portanto as correntes em todos os enrolamentos são facilmente calculadas:

$$I = 84 \, \text{A}$$

$$V = 250 \, \text{V}$$

$$r_F = 184 \, \Omega \rightarrow i_F = 1,36 \, \text{A}$$

$$i_a = I - i_F = 82,6 \, \text{A}$$

A tensão interna da máquina (ou tensão de armadura) é dada por:

$$E = V - r_a i_a = 243,2 \, \text{V}$$

Levando em consideração o efeito desmagnetizante da reação da armadura, a corrente de campo será descontada de 0,09 A como foi dado no enunciado.

$$i_F' = 1,36 - 0,09 = 1,27 \text{ A}$$

Olhando na curva de magnetização (Figura 22) observa-se que, se a velocidade fosse 1800 rpm a tensão interna da máquina seria 242 V. Portanto usando a regra da proporcionalidade entre a tensão interna e a velocidade obtém-se:

$$a) \ n = \frac{n_0 E}{E_0} = \frac{1.800 \times 243,2}{242} = 1.809 \text{ rpm}$$

Este exemplo mostra uma situação interessante: a velocidade em vazio (1.800 rpm) é menor que a velocidade em carga. Este efeito ocorre devido à reação da armadura, ou à redução de 0,09 A na corrente efetiva de campo. Observe que, nestas condições, a característica conjugado velocidade que, como foi visto, tem que ter uma inclinação negativa para ser estável, passa a ter uma inclinação positiva, ou seja, instável.

Para solucionar este problema usa-se os chamados ENROLAMENTOS ESTABILIZANTES que são enrolamentos em série com a corrente de armadura que aumentam o fluxo com o aumento da corrente. Estes enrolamentos tendem a compensar o efeito da reação da armadura fazendo com que a característica conjugado velocidade volte a ser estável.

A solução da letra “b” do exemplo é direta:

$$b) \ P_e = E \cdot i_a = 243,2 \cdot 82,3 = 20.088 \text{ W}$$

A potência de saída será dada por:

$$P_{out} = P_e - \text{Perdas Rotacionais} - \text{Perdas Suplementares}$$

$$P_{out} = 20.088 - 1300 - 0,01 P_{out}$$

$$P_{out} = 18.600 \text{ W, ou}$$

$$c) \ P_{out} = 18.600 \cdot (1 \text{ HP}/746 \text{ W}) = 24,9 \text{ HP}$$

O conjugado de saída será dado por:

$$\Gamma_{out} = \frac{P_{out}}{\omega} \quad (59)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n \quad (60)$$

$$\omega = 189 \text{ rad/s}$$

$$d) \Gamma_{\text{out}} = 98,19 \text{ Nm}$$

O rendimento pode ser calculado como:

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}$$

$$\text{com: } P_{\text{in}} = V.I = 250 \cdot 84 = 21.000 \text{ W}$$

$$P_{\text{out}} = 18.600$$

Portanto:

$$\eta = 88,6 \%$$

ou, considerando as perdas em cada um dos enrolamentos:

$$\text{Perdas armadura} = r_a i_a^2 = 559,5 \text{ W}$$

$$\text{Perdas campo} = r_F i_F^2 = 340,3 \text{ W}$$

$$\text{Perdas rotacionais} = 1.300 \text{ W}$$

$$\text{Perdas Suplementares} = 1\% P_{\text{out}} = 186 \text{ W}$$

$$\text{Perdas Totais} = 2.385 \text{ W}$$

$$\eta = 1 - \frac{\text{Perdas}}{P_{\text{in}}} \quad (61)$$

$$\eta = 88,6 \%$$

Exemplo 20

A curva de magnetização de um motor CC série de 150 HP, 250 V, e 510 A é dada na Figura 22 (para $n = 900 \text{ rpm}$). A resistência da armadura $r_a = 0,0127 \Omega$, a resistência série do campo é igual a $0,0087 \Omega$. O campo tem 10 espiras e o efeito da reação da armadura é o de produzir uma fmm desmagnetizante equivalente a 250 A-espiras para corrente nominal. Esta reação da armadura varia linearmente com a corrente. Calcular a velocidade, a potência eletromagnética e o conjugado para uma corrente de carga de 510 A (carga nominal) e para metade da carga nominal (255 A).

Solução

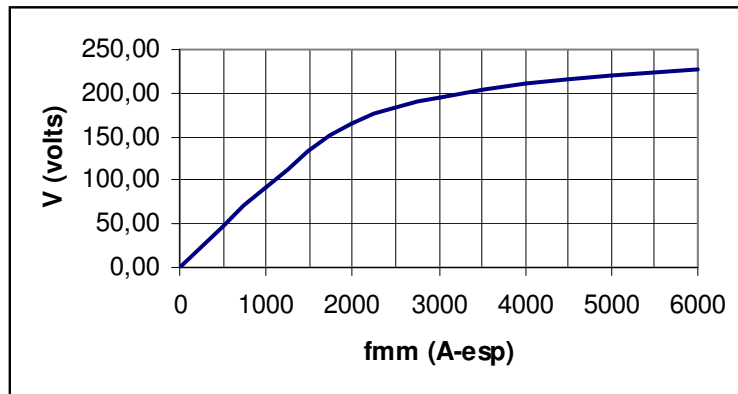


Figura 22: Curva de magnetização ($n = 900$ rpm) da máquina do exemplo 21

A tensão interna é dada por:

$$E = V - (r_a + r_F) I$$

$$E = 250 - (0,0127 + 0,0087) \cdot 510 = 239,08 \text{ V}$$

A fmm produzida pelo enrolamento de campo, descontado o efeito da reação da armadura, é dada por (para o caso de carga nominal $I = 510$ A):

$$f_{mm} = 10 \cdot 510 - 250 \text{ A.espaço} = 4850 \text{ A.espaço}$$

Da curva de magnetização obtém-se: $E_0 = 220$ V.

$$n = \frac{E}{E_0} n_0 = \frac{239,08}{220} 900 = 978 \text{ rpm}$$

A potência eletromagnética nestas condições é dada por:

$$P_e = E \cdot i_a = 239,08 \cdot 510 = 122 \text{ kW}$$

Finalmente, o conjugado será dado por:

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = 102 \text{ rad/s}$$

$$\Gamma = \frac{P_e}{\omega} = 1190 \text{ Nm}$$

Resolvendo para carga média ($I = 255$ A), tem-se:

$$E = 250 - (0,0087 + 0,0127) \cdot 255 = 244,5 \text{ V}$$

$$\text{fmm} = 10 \cdot 255 - 250 \cdot (255/510) = 2425 \text{ A.esp}$$

Da curva de magnetização obtém-se: $E_0 = 180 \text{ V}$

Portanto, a velocidade, a potência e o conjugado serão dados por:

$$n = \frac{E}{E_0} n_0 = \frac{244,5}{180} 900 = 1.222,5 \text{ rpm}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = 128 \text{ rad/s}$$

$$P_e = E \cdot i_a = 244,5 \cdot 255 = 62,3 \text{ kW}$$

$$\Gamma_e = 487 \text{ Nm}$$

Estes dois pontos calculados neste exemplo mostram a grande variação da velocidade com a carga em uma máquina CC série como tinha sido mostrado no item anterior.

Exemplo 21

Usando a mesma curva de magnetização do exemplo anterior, considerar um motor de corrente contínua composto aditivo e com derivação longa com 600 espiras no enrolamento em paralelo e 4 espiras no enrolamento série. Sabendo-se que a tensão nominal deste motor é de 250 V, que a resistência do campo série é de 0,0037 Ω , que a resistência do campo paralelo é de 46,5 Ω e que a resistência de armadura é igual a 0,0127 Ω . Calcular a velocidade deste motor em vazio em carga nominal, para uma corrente de 510 A.

Solução

Um motor em vazio significa sem carga mecânica. Portanto, como o conjugado mecânico é igual ao elétrico em regime permanente, e desprezando as perdas rotacionais, tem-se:

$$\Gamma_e = k\phi_F i_a = 0$$

$$i_a = 0$$

$$I = i_F = \frac{V}{r_F} = \frac{250}{46,5} = 5,38 \text{ A}$$

A força magnetomotriz será então dada por:

$$\text{fmm} = 600 \cdot 5,38 = 3.226 \text{ A.esp}$$

Da curva de magnetização obtém-se:

$$E_0 = 200 \text{ V}$$

A tensão interna em vazio é igual a tensão terminal, então:

$$V = E = 250 \text{ V}$$

$$n = \frac{E}{E_0} n_0 = \frac{250}{200} 900 = 1.125 \text{ rpm}$$

Se a corrente for a nominal ($I = 510 \text{ A}$) tem-se:

$$f_{mm} = 600 \cdot 5,38 + 4 \cdot 504,6 - 250 = 3.226 + 2.018,5 - 250 = 4.994,5 \text{ A.esp}$$

Para esta fmm de acordo com a curva de magnetização tem-se $E_0 = 220 \text{ V}$. Como a tensão interna é dada por:

$$E = V - (r_a + r_F) i_a = 250 - (0,0164) \cdot 504,6 = 241,7 \text{ V}$$

Então:

$$n = \frac{E}{E_0} n_0 = \frac{241,7}{220} 900 = 988,9 \text{ rpm}$$

A potência e o conjugado eletromagnético são dados por:

$$P_e = E \cdot i_a = 121,9 \text{ kW}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = 103,5 \text{ rad/s}$$

$$\Gamma_e = 1.177,7 \text{ Nm}$$

8) Controle de Velocidade de um Motor de Corrente Contínua

As características de conjugado em função da velocidade vistas no item 6 mostraram que é muito fácil controlar a velocidade de um motor de corrente contínua. De fato, considerando um motor com excitação em separado (ou com excitação em paralelo) e combinando a equação de tensão e do circuito obtém-se:

$$E = k \phi_F \omega \tag{62}$$

$$V = r_a i_a + E \tag{63}$$

e

$$\omega = \frac{V - r_a i_a}{k \phi_F} \quad (64)$$

Analisando a equação 64 observa-se que é possível variar a velocidade variando o fluxo produzido pelo campo, variando o valor da resistência de armadura ou variando a tensão de entrada. Note que a corrente de armadura é resultado do equilíbrio entre o conjugado mecânico e o conjugado elétrico, portanto vai depender da carga.

O controle da velocidade através da variação do fluxo de campo é o mais simples e mais barato. Basta inserir em série com o enrolamento de campo um reostato. Este controle é limitado pela resistência nula do reostato por um lado (corrente máxima de campo) e por um fluxo mínimo (corrente mínima) com o reostato em sua posição de máxima resistência, por outro. A maior velocidade é limitada pelo fluxo mínimo em que a máquina possa operar sem que o efeito da reação da armadura interfira demais no comportamento da máquina.

Os enrolamentos estabilizantes, vistos no exemplo 19, aumentam muito este limite fazendo com que a máquina possa trabalhar com variação da velocidade em uma razão de 1/8.

A variação do fluxo de campo provoca uma variação no conjugado elétrico. O novo ponto de equilíbrio ocorrerá quando o conjugado voltar a igualar o conjugado mecânico.

Exemplo 22

Considere um motor de corrente contínua com excitação em paralelo, operando na região linear da sua curva de magnetização, com as seguintes características:

$$r_a = 1\Omega$$

$$r_F = 100\Omega$$

$$V = 250 \text{ V}$$

$$L_{AF} = 0,5 \text{ H}$$

Este motor opera em regime permanente a uma velocidade constante de 1.700 rpm acionando uma carga mecânica de conjugado constante. Mostre o que ocorre com a velocidade se for colocado em série com o enrolamento de campo um reostato de 100 Ω .

Solução

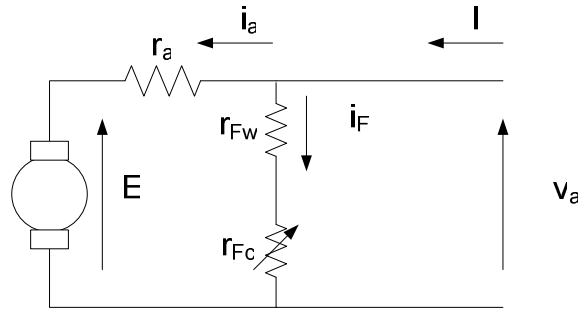


Figura 23: Diagrama do exemplo 22

Na situação inicial, o valor da corrente de campo é igual a 2,5 A. A tensão interna é dada por:

$$E = L_{AF} i_F \omega = 0,5 \times 2,5 \times 178 = 222,5 \text{ V}$$

A corrente de armadura, nesta situação, é igual a:

$$i_a = \frac{V - E}{r_a} = \frac{250 - 222,5}{1} = 27,5 \text{ A}$$

E o conjugado elétrico que é igual ao mecânico é dado por:

$$\Gamma_e = \Gamma_m = L_{AF} i_F i_a = 0,5 \times 2,5 \times 27,5 = 34,37 \text{ Nm}$$

Colocando uma resistência de $100 \, \Omega$ no campo, a corrente de campo e o fluxo ficam reduzidos à metade.

$$i_F = 1,25 \text{ A}$$

O conjugado elétrico reduz, transitoriamente à metade, diminuindo a velocidade da máquina. A redução da velocidade provoca redução na tensão interna e aumento na corrente de armadura. O novo ponto de equilíbrio ocorrerá quando o conjugado elétrico igualar o conjugado mecânico, ou seja, quando a corrente de armadura assumir o seguinte valor:

$$i_a = \frac{\Gamma_e}{L_{AF} i_F} = \frac{34,37}{0,5 \times 1,25} = 55 \text{ A}$$

Neste novo ponto de operação a tensão interna é igual a:

$$E = V - r_a \cdot i_a = 250 - 55 = 195 \text{ V}$$

E a nova velocidade será igual a:

$$\omega = \frac{E}{L_{AF} i_F} = 312 \text{ rad/s}$$

Graficamente a mudança no ponto de operação pode ser vista na Figura 24

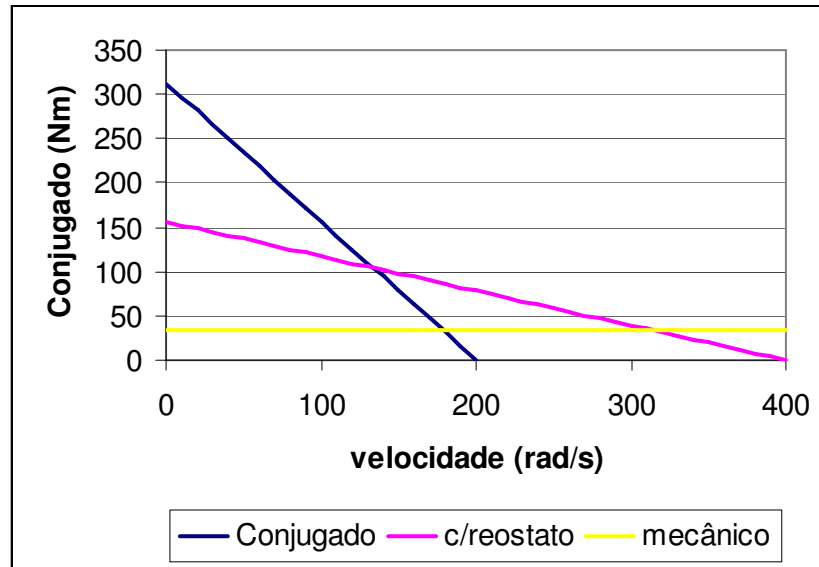


Figura 24: Conjugado versus velocidade para o exemplo 22

Exemplo 23

Repetir o exemplo anterior considerando que o conjugado mecânico varia com o quadrado da velocidade.

Solução

O ponto inicial de funcionamento foi definido anteriormente. O novo ponto será obtido quando o conjugado elétrico for igual ao mecânico para a nova velocidade. De acordo com o enunciado a expressão para o conjugado mecânico é dada por:

$$\Gamma_m = k\omega^2 \quad (65)$$

Então, do primeiro ponto de funcionamento tira-se o valor de k:

$$k = \frac{\Gamma_m}{\omega^2} = \frac{34,37 \text{ Nm}}{(178 \text{ rad/s})^2} = 1,1 \times 10^{-3} \text{ Nms}^2$$

Igualando a equação do conjugado elétrico com a do mecânico obtém-se uma expressão para a corrente de armadura:

$$i_a = \frac{k\omega^2}{L_{AF}i_F} \quad (66)$$

Onde tudo é conhecido. Substituindo na expressão da velocidade (64), obtém-se uma equação do segundo grau em ω , cuja solução é:

$$\omega = 240 \text{ rad/s}$$

A solução gráfica, através de uma planilha onde se equaciona o conjugado elétrico e mecânico em função da velocidade também é direta e está mostrada na Figura 25.

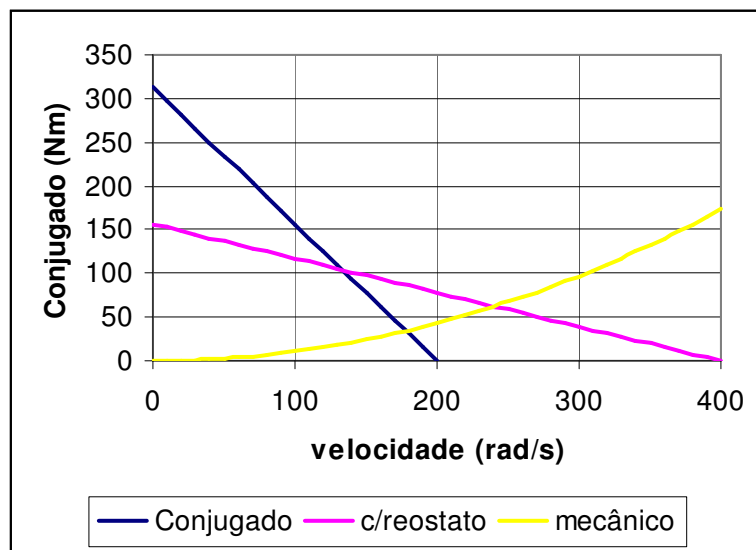


Figura 25: Conjugado x velocidade – Exemplo 23

O controle da velocidade depende do conhecimento da carga.

Outra forma muito simples de se controlar a velocidade de um motor de corrente contínua é através da inclusão de um reostato em série com o enrolamento de armadura.

Exemplo 24

Considere o motor do exemplo 22, naquele ponto de funcionamento descrito. O que ocorre se for instalado um reostato de 5Ω em série com a armadura?

Solução

O ponto de operação foi calculado no exemplo 22:

$$E = 222,5 \text{ V}$$

$$i_a = 27,5 \text{ A}$$

$$\Gamma_e = 34,37 \text{ Nm}$$

Quando o reostato de campo for inserido, não haverá nenhuma alteração no fluxo uma vez que a tensão e a resistência não foram alteradas. No novo ponto de equilíbrio, supondo que o conjugado mecânico permaneça constante, independente da velocidade, ocorrerá para o mesmo valor de conjugado elétrico, portanto, para o mesmo valor de corrente de armadura.

A nova velocidade será dada por:

$$\omega = \frac{V - (r_a + r(\text{ext}))i_a}{L_{AF}i_F} = \frac{250 - 6 \times 27,5}{0,5 \times 1,25} = 68 \text{ rad/s}$$

Observa-se uma grande variação da velocidade. O gráfico da Figura 26 mostra esquematicamente a mudança.

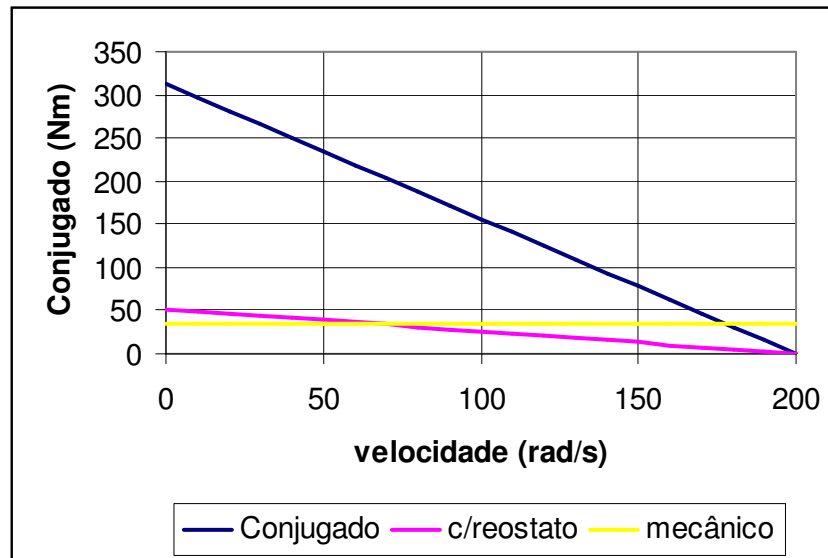


Figura 26: Conjugado x velocidade – Exemplo 24

É fácil observar que a faixa de variação de velocidade com esta forma de controle é muito maior. Não existe, por exemplo, a limitação de fluxo mínimo porque o fluxo permanece constante.

Exemplo 25

Calcular a potência eletromagnética e o rendimento do motor nas duas situações descritas nos exemplos 23 e 24.

Solução

Do exemplo 24, tem-se diretamente:

$$E = 222,5 \text{ V}$$

$$i_a = 27,5 \text{ A}$$

$$P_e = 6,1 \text{ kW}$$

$$i_F = 2,5 \text{ A} \rightarrow I = 30 \text{ A}$$

$$P_{in} = 30 \cdot 250 = 7,5 \text{ kW}$$

$$\eta = 81,75 \%$$

Observe que, como não foram dados as perdas rotacionais ou suplementares, para o cálculo do rendimento supôs-se que a potência eletromagnética fosse igual à potência de saída.

No exemplo 24 tem-se:

$$i_a = 27,5 \text{ A}$$

$$E = 85 \text{ V}$$

$$P_e = 2,3 \text{ kW}$$

$$i_F = 2,5 \text{ A} \rightarrow I = 30 \text{ A}$$

$$P_{in} = 7,5 \text{ kW}$$

$$\eta = 31,17 \%$$

Note que não houve alteração na potência de entrada. O que ocorre com a inclusão do reostato na armadura é a dissipação, na forma de calor, de parte da energia entregue à armadura. Esta forma de controle de velocidade é muito barata na implementação e muito cara (para altas potências) na manutenção, ou seja, em termos de desperdícios energéticos.

Exemplo 26

Considere um motor CC com excitação em série e com os seguintes dados:

$$V = 250 \text{ V};$$

$$r_a = r_F = 1 \text{ } \Omega$$

$$L_{AF} = 0,5 \text{ H}$$

Este motor aciona uma determinada carga cujo conjugado independe da velocidade e, quando alimentado com tensão nominal, desenvolve uma velocidade de 100 rad/s. Calcular o efeito da inserção de um reostato (R) de 10 Ω em série com o circuito de armadura.

Solução

Do exemplo 18, equação 55, fazendo inicialmente $R = 0$, tem-se:

$$i_a = i_F = \frac{V}{r_a + r_F + R + \omega L_{AF}} = 4,8A \quad (67)$$

O conjugado mecânico, nesta situação é igual a:

$$\Gamma_m = \Gamma_e = L_{AF} i_a^2 = 11,52Nm \quad (68)$$

Colocando a resistência do reostato em série o conjugado elétrico vai, transitoriamente, diminuir, desacelerando a máquina e aumentando a corrente de campo e de armadura. O novo ponto de equilíbrio ocorrerá quando o conjugado elétrico voltar a ficar igual ao conjugado mecânico, ou seja, quando:

$$i_a = \sqrt{\frac{\Gamma_e}{L_{AF}}} = 4,8A \quad (69)$$

Ao final do regime transitório a corrente volta ao seu valor anterior uma vez que não houve alteração na carga. A velocidade neste novo ponto de operação será dada por:

$$\omega = \frac{V - (r_a + r_F + R)i_a}{L_{AF} i_a} = 80rad / s \quad (70)$$

Traçando o gráfico do conjugado em função da velocidade para as duas situações ($R = 0$ e $R = 10$) tem-se:

$$\Gamma_e = \frac{L_{AF} V^2}{(r_a + r_F + R + \omega L_{AF})^2} \quad (71)$$

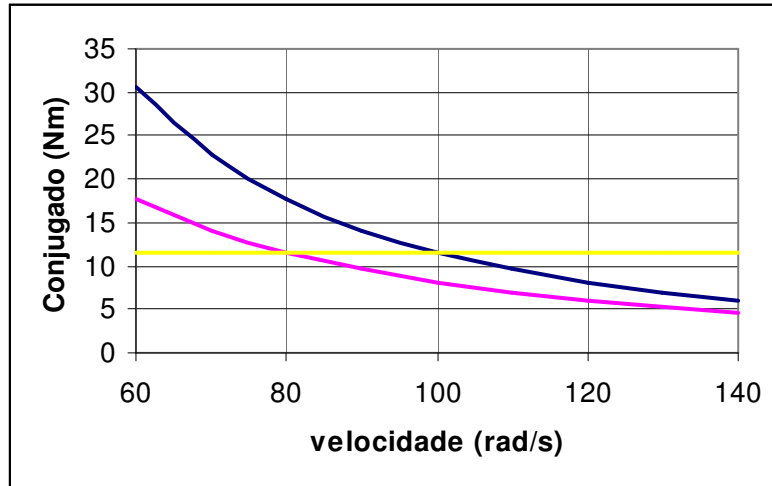


Figura 27: Conjugado x velocidade – Exemplo 26

A terceira forma de controlar a velocidade seria variando a tensão de entrada. Uma fonte CC de tensão controlada pode ser facilmente implementada com a utilização de dispositivos de eletrônica de potência.

Exemplo 27

Com os dados do exemplo 22, determinar o novo ponto de funcionamento do motor supondo que a tensão seja reduzida a sua metade.

Solução

Repetindo o ponto de funcionamento inicial:

$$V = 250 \text{ V};$$

$$E = 222,5 \text{ V};$$

$$i_a = 27,5 \text{ A};$$

$$i_F = 2,5 \text{ A}$$

$$I = 30 \text{ A};$$

$$\Gamma_e = 34,37 \text{ Nm};$$

$$\omega = 178 \text{ rad/s}.$$

A expressão que relaciona o conjugado e a velocidade (53) é repetida para maior clareza:

$$\Gamma_e = \frac{L_{AF} V^2}{r_a r_F} \left\{ 1 - \frac{L_{AF} \omega}{r_F} \right\}$$

Com a nova tensão, tem-se:

$$V = 125 \text{ V};$$

$$i_F = \frac{V}{r_F} = 1,25 \text{ A}$$

$$i_a = \frac{\Gamma_e}{L_{AF} i_F} = \frac{34,37}{0,5 \times 1,25} = 55 \text{ A}$$

$$E = V - r_a i_a = 250 - 1 \cdot 55 = 70 \text{ V}$$

$$\omega = \frac{E}{L_{AF} i_F} = 112 \text{ rad/s}$$

Graficamente, observa-se na Figura 28, que o efeito da mudança da tensão é alterar a inclinação da curva conjugado / velocidade, lembrando que o conjugado varia com o quadrado da tensão.

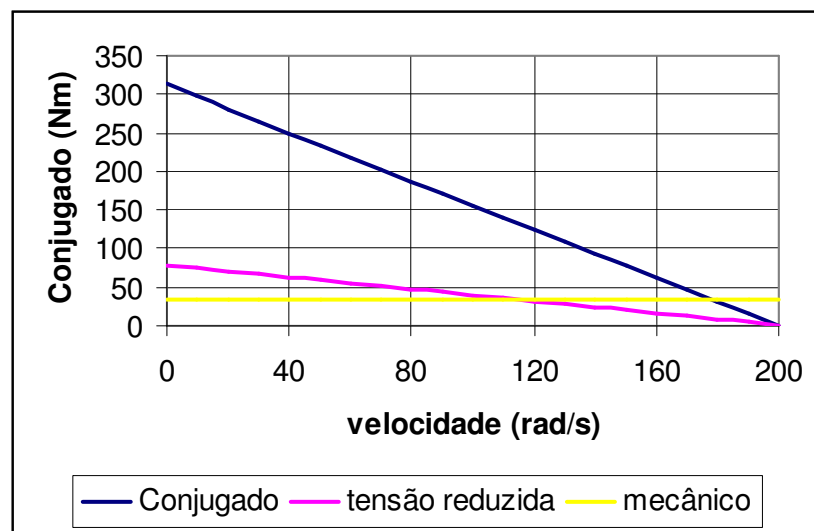


Figura 28: Conjugado x velocidade – Exemplo 27

Exemplo 28

Avaliar o rendimento da máquina nas duas situações descritas no exemplo 27.

Solução

Na situação inicial, o rendimento já foi calculado (Exemplo 25):

$$\eta = 81,75 \%$$

No ponto de operação com tensão reduzida tem-se:

$$P_e = E \cdot i_a = 70 \cdot 55 = 3,85 \text{ kW}$$

$$P_{in} = V \cdot I = 125 \cdot 56,25 = 7,03 \text{ kW}$$

Portanto:

$$\eta = 54,76 \%$$

Houve uma diminuição no rendimento mas não nos mesmos níveis da inserção da resistência no enrolamento de armadura. Este método é, sem dúvida, uma forma mais inteligente de se controlar a velocidade no motor de corrente contínua.

Exemplo 29

Repetir o exemplo 26 (motor CC em série) supondo uma redução de 50% na tensão de entrada.

Solução

O ponto de funcionamento inicial já foi calculado:

$$i_a = i_F = 4,8 \text{ A}$$

$$\omega = 100 \text{ rad/s}$$

$$\Gamma_e = 11,52 \text{ Nm}$$

Se o conjugado permanece constante, a corrente de armadura não pode alterar. Então a nova velocidade é dada por:

$$\omega = \frac{V - (r_a + r_F)i_a}{L_{AF}i_F} = \frac{125 - 2 \times 4,8}{0,5 \times 4,8} = 48 \text{ rad/s}$$

Graficamente, tem-se

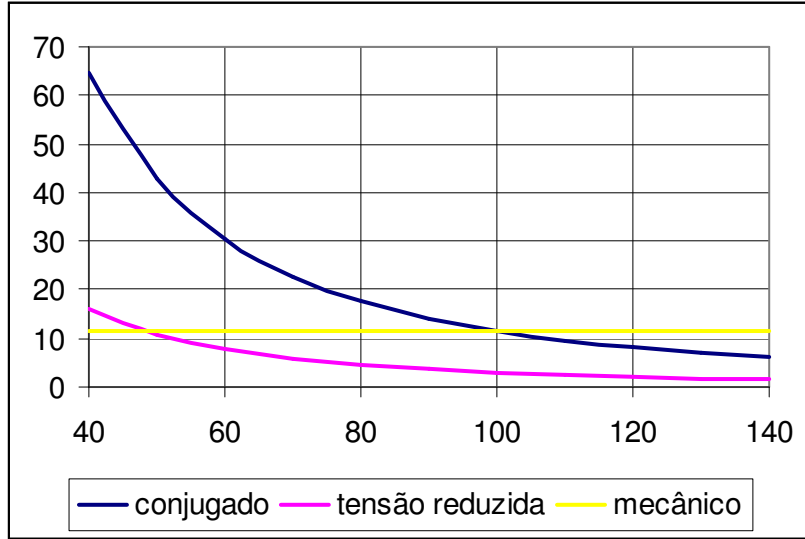


Figura 29: Conjugado x velocidade – Exemplo 29

A velocidade é quase que diretamente proporcional à tensão aplicada. Além disto, com esta forma de controle as perdas não se alteram. Esta é uma forma muito comum de controle de velocidade de motores de tração. O sistema de controle de velocidade dos motores do Metro de Brasília é baseado neste conceito.

9) Dinâmica da Máquina de Corrente Contínua

A análise dinâmica da máquina de corrente contínua consiste em resolver simultaneamente as equações de tensão e a equação mecânica da máquina. Em outras palavras, em resolver as equações 22 e 25. Repetindo estas equações usando o operador “p” para representar o diferencial no tempo, tem-se:

$$v_F = r_F i_F + p L_{FF} i_F \quad (72)$$

$$v_a = r_a i_a + p L_{aa} i_a + \omega L_{AF} i_F \quad (73)$$

$$\Gamma_e - \Gamma_m = p J \omega + B \omega \quad (74)$$

Para determinar o comportamento da máquina, as variáveis de interesse são as correntes e a velocidade, então, podem-se reescrever estas equações da seguinte forma diferencial:

$$i_F = \frac{v_F}{r_F} \left\{ \frac{1}{1 + \tau_F p} \right\} \quad (75)$$

$$i_a = \frac{v_a - L_{AF} i_F \omega}{r_a} \left\{ \frac{1}{1 + \tau_a p} \right\} \quad (76)$$

$$\omega = (\Gamma_e - \Gamma_m) \left\{ \frac{1}{B + J_p} \right\} \quad (77)$$

Onde: $\tau_a = L_{aa}/r_a$, $\tau_F = L_{FF}/r_F$, o conjugado elétrico é uma função das duas correntes e o conjugado mecânico pode ou não ser função da velocidade.

Trata-se de um sistema de equações diferenciais não lineares que pode ser resolvido para qualquer condição de carga através de um processo de integração numérica.

Em várias situações onde a excitação é em separado (ou em paralelo sem variação da tensão de entrada) onde a corrente de campo permanece constante, eliminando assim uma equação e uma não-linearidade do sistema.

9.1) Dinâmica do Controle de Velocidade

Exemplo 30

Simule numericamente o que ocorre com as correntes e com a velocidade com a inclusão do reostato de campo proposto no exemplo 22.

Solução

As três equações descritas por (75), (76) e (77) foram simuladas no Matlab com os seguintes dados complementares:

$$\tau_a = 1,2 \text{ ms}$$

$$\tau_F = 0,5 \text{ s}$$

$$J = 0,1 \text{ Ns}^2$$

$$B = 1 \text{ m Nm/s}$$

A constante de tempo do campo (paralelo) é sempre muito maior que a do enrolamento de armadura uma vez que construtivamente a bobina deste campo tem muitas espiras. As constantes mecânicas foram escolhidas de forma a não alterar significativamente o resultado obtido no exemplo 22, ou seja, foi usado um valor bem baixo de B para não alterar muito o conjugado da carga.

O programa de simulação está mostrado abaixo:

```
function xponto = shunt1(t,x)
global contador
% dinamica do motor shunt
xponto = zeros(3,1);
% parametros
```

```

RTA = [100 200]';
rf = RTA(contador);
talf = 0.5; tala = 0.0012 ; laf = 0.5;
J = 0.1; B = 0.001; ra = 1; va = 250; tl = 34.37;
% equacoes
xponto(1) = ((va/rf)-x(1))/talf;
xponto(2) = (((va-(laf*x(1)*x(3)))/ra)-x(2))/tala;
te = laf*x(1)*x(2);
xponto(3) = (te-tl-B*x(3))/J;
if(t > 1)
    contador = 2;
end;
global contador;
contador = 1;
t0 = 0;
tf = 5.0;
x0 = [2.5 27.5 178]';
[t,x] = ode23('shunt1',t0,tf,x0);
subplot(3,1,1);
plot(t,x(:,1));
subplot(3,1,2);
plot(t,x(:,2));
subplot(3,1,3);
plot(t,x(:,3));

```

A simulação foi feita considerando que o motor estivesse operando em regime permanente até $t = 1$ s e, neste instante, é inserido o reostato de campo. A figura 30 mostra o resultado da simulação.

A simulação mostra a lenta variação na corrente de campo, a rápida variação inicial da corrente de armadura e a lenta acomodação da velocidade do motor (e por consequência da corrente de armadura) em função da constante de tempo mecânica.

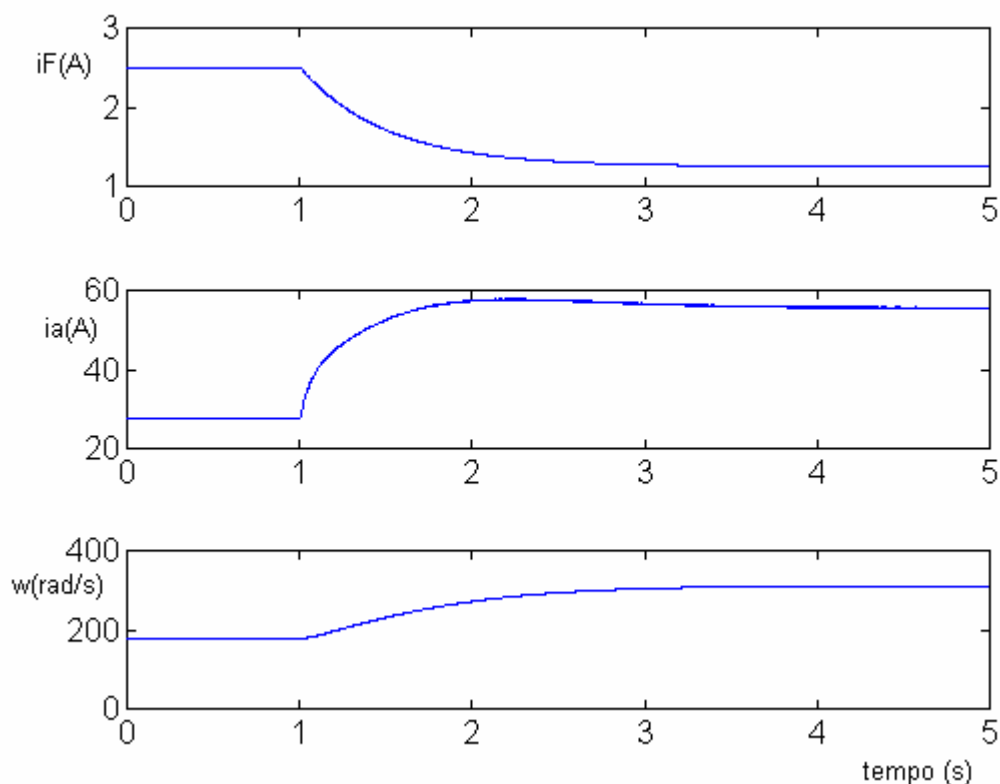


Figura 30: Dinâmica do motor de corrente contínua

Todos os outros exemplos de controle de velocidade podem ser simulados com pequenas mudanças no programa. Estes exemplos são deixados como exercício.

9.2) Partida de um motor de corrente contínua

Como foi visto, o que limita a corrente de armadura é a tensão interna de máquina (E). Quando a máquina está parada o seu valor é nulo e a única limitação é a resistência de armadura que, por motivos de eficiência, tem que ser pequena. A corrente do motor CC pode, então, atingir valores inadmissíveis e, em alguns casos, é necessário um sistema especial para limitar esta corrente.

Existem duas formas simples de limitar a corrente de partida. A primeira é a inserção de resistores em série com a armadura. A outra é o controle da tensão aplicada.

As resistências aplicadas devem ser curto circuitadas em regime permanente para que o rendimento do motor não fique muito prejudicado, assim, um esquema para inserção destes resistores é mostrado na Figura 31 com contatores ligados em paralelo para curto-circuitá-los durante a partida.

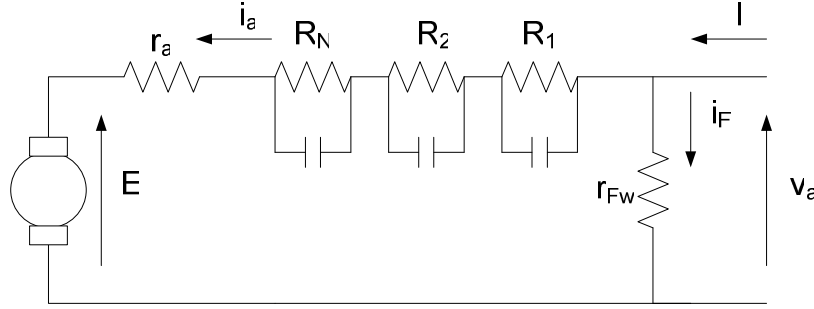


Figura 31: Partida de motor CC com resistores em série com a armadura

Exemplo 31

Determinar qual o número “N” de resistência em série com a armadura de forma a limitar a corrente a corrente de armadura em $I_{\text{máx}}$.

Solução

Este problema, assim como o controle de velocidade do motor, é um problema dinâmico. No entanto, é possível supor que, como as constantes de tempo elétricas são bem menores que as mecânicas, que o sistema atinja um regime permanente antes da retirada de outra resistência, desta forma o problema se torna uma seqüência de regimes permanentes.

Com esta suposição, a corrente de armadura é dada por:

$$i_a = \frac{V - L_{AF}\omega i_F}{r_T} \quad (78)$$

Onde r_T é a resistência total vista pelo enrolamento da armadura. Na partida:

$$R_{T1} = r_a + R_N + \dots + R_2 + R_1$$

Cujo valor tem que ser:

$$R_{T1} = \frac{V}{I_{\text{max}}} \quad (79)$$

Para limitar a corrente no valor estipulado.

O aumento da velocidade implica em redução da corrente. É necessário estipular um valor mínimo para esta corrente, por exemplo, o valor nominal da corrente do motor, para retirar a primeira resistência do circuito. Neste instante:

$$i_a = I_{\text{min}} = \frac{V - L_{AF}\omega i_F}{R_{T1}} \quad (80)$$

Neste instante a resistência R_N é retirada do circuito. O valor desta resistência deve ser calculado de forma que a corrente não ultrapasse o valor máximo estabelecido, então:

$$I_{\max} = \frac{V - L_{AF} \omega i_F}{R_{T2}} \quad (81)$$

onde

$$R_{T2} = r_a + R_{(N-1)} + \dots + R_2 + R_1 \quad (82)$$

Dividindo a equação (81) pela (80) tem-se:

$$I_{\max} = \frac{R_{T1}}{R_{T2}} I_{\min} \quad (83)$$

Repetindo este procedimento “N” vezes, obtém-se:

$$\left(\frac{I_{\max}}{I_{\min}} \right)^N = \frac{R_{T1}}{R_{T2}} \cdot \frac{R_{T2}}{R_{T3}} \dots \frac{R_{TN}}{r_a} \quad (84)$$

Portanto:

$$N = \frac{\ln \frac{R_{T1}}{r_a}}{\ln \frac{I_{\max}}{I_{\min}}} \quad (85)$$

Exemplo 32

Calcular os estágios de partida para a máquina do exemplo 22 supondo que a corrente máxima não possa superar duas vezes a corrente nominal.

Solução

A corrente nominal é de 27,5 A, portanto $I_{\max} = 55$ A. O valor de R_{T1} é dado diretamente a partir de (79):

$$R_{T1} = 250 / 55 = 4,54 \Omega$$

Então:

$$N = \frac{\ln(4,54/1)}{\ln(2)} = 2,18$$

Como “N” tem que ser inteiro e para que a corrente não ultrapasse o valor máximo, escolhe-se $N = 3$. Para este valor de N a corrente máxima será:

$$I_{\max} = I_{\min} \sqrt[3]{\frac{4,54}{1}} = 45,53 \text{ A}$$

Uma vez determinado N e R_{T1} , o valor dos três estágios de resistência pode ser calculado da regra de três definida em (83).

$$R_{T2} = R_{T1} \cdot \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = 2,74 \Omega$$

Portanto:

$$R_1 = R_{T1} - R_{T2} = 1,8 \Omega$$

Da mesma forma:

$$R_{T3} = R_{T2} \cdot \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = 1,66 \Omega$$

$$R_2 = R_{T2} - R_{T3} = 1,08 \Omega$$

Como $r_a = 1 \Omega$; $R_3 = 0,66 \Omega$.

Todos os estágios de partida do motor ficam assim definidos.

Exemplo 33

Calcular as correntes de partida e a velocidade do motor de indução do exemplo anterior considerando os três resistores instalados em série com a armadura. Considere que a carga varie linearmente com a velocidade com $B = 0,1$ e que a constante de tempo mecânica (J/B) da máquina seja de 5 segundos.

Solução

Resolver este problema consiste em resolver simultaneamente as equações (75), (76) e (77). Usando um programa semelhante ao mostrado anteriormente e fazendo a resistência de armadura variar entre os valores calculados no exemplo anterior, obtém-se as curvas da Figura 32.

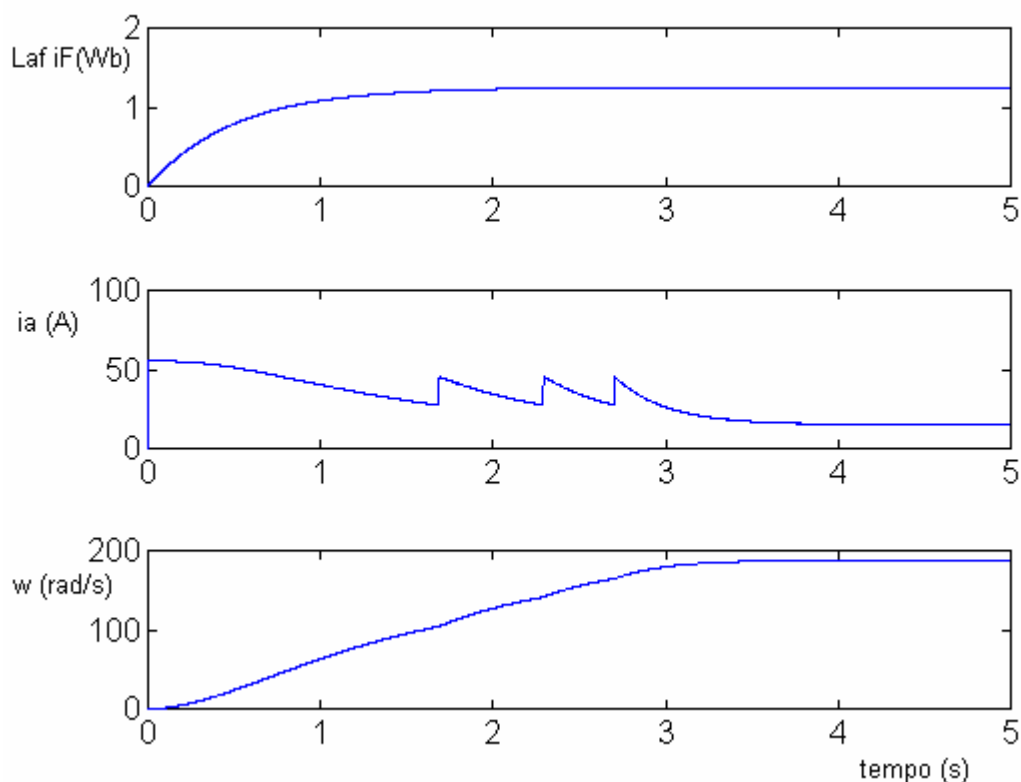


Figura 32: Simulação no tempo da partida de um motor de corrente contínua com excitação em paralelo

10) Referências Bibliográficas

- [1] MATSCH, L. W., MORGAN, J. D., "Electromagnetic and Electromechanical Machines", Harper and Row, NY, 1986.
- [2] FITZGERALD, A. E., KINSLEY, C., KUSKO, A., "Máquinas Elétrica", McGraw Hill, São Paulo, 1979.
- [3] DEL TORO, V., "Fundamentos de Máquinas Elétricas", Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1994.
- [4] NASAR, S. A., "Electric Machines and Transformers", Macmillan, NY, 1984.
- [5] NASAR, S. A., "Máquinas Elétricas", Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1984.
- [6] KRAUSE, P., WASYNCZUK, O., SUDHOFF, S.D., "Analysis of Electric Machinery", IEEE Press, NY, 1995.
- [7] LESENNE, J., NOTELET, F., SÉGUIER, G., "Introduction à l'Electrotechnique Approfondie", Technique et Documentation, Paris, 1981.

MOTOR DE INDUÇÃO TRIFÁSICO

18/10/2006

Ivan Camargo

1) Introdução

O motor de indução trifásico corresponde a, aproximadamente, 25 % da carga elétrica do Brasil, ou seja, 50 % da carga industrial que, por sua vez, corresponde a 50 % da carga total.

A grande vantagem do motor de indução trifásico é a sua capacidade de operar sem necessidade de contato com os enrolamentos do rotor. Isso reduz significativamente os custos e a manutenção.

A alimentação do motor de indução trifásico (MIT) é em corrente alternada. Normalmente a alimentação é feita pelo estator. Os enrolamentos do rotor podem ser de dois tipos: “bobinado” ou “gaiola de esquilo”. O rotor bobinado, menos usado, tem bobinas trifásicas no rotor e anéis coletores no eixo de forma a permitir o acesso às correntes induzidas nos enrolamentos do rotor. O rotor tipo gaiola de esquilo é composto de barramentos condutores alojados em ranhuras do rotor e curto circuitados. Este tipo de enrolamento permite a construção de equipamentos bastante robustos. É a forma mais comum dos MIT.

A velocidade de operação do MIT é aproximadamente constante e sempre menor que a velocidade síncrona, por esta razão este motor é também chamado motor assíncrono.

Nestas notas será analisado o comportamento deste motor em regime permanente.

2) Campo Magnético Girante

Os enrolamentos do estator de um motor trifásico são distribuídos ao longo do entreferro do motor de forma a produzir uma fmm com características aproximadamente senoidais e com defasagem de $2\pi/3$ radianos elétricos. Uma máquina de 2 pólos pode ser representada esquematicamente pela figura 1.

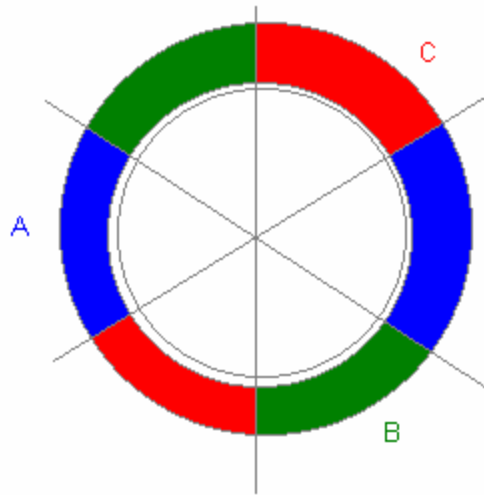


Figura 1: Distribuição dos enrolamentos do estator de um MIT de dois pólos.

Desprezando-se o efeito das ranhuras, ou seja, considerando que o entreferro é constante e que as correntes entrando e saindo nos condutores possam ser representadas por uma corrente concentrada, pode-se representar a fmm produzida pela fase "a" em função do ângulo espacial do entreferro θ , considerando que no eixo magnético da fase "a" $\theta = 0$ pode ser representada pela forma de onda apresentada na figura 2.

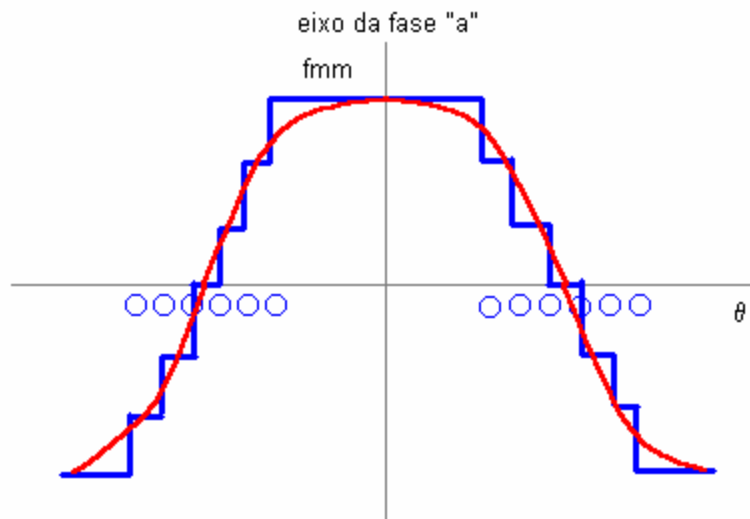


Figura 2: fmm produzida pelos enrolamentos distribuídos da fase "a".

Esta forma de onda pode ser decomposta em série de Fourier e, tomando-se algum cuidado com o espaçamento entre as ranhuras, pode-se minimizar as harmônicas de baixa

ordem de forma que a representação da fmm produzida por uma corrente i_a pode ser dada por uma função cossenoidal do ângulo θ .

$$F_{1a}(\theta) = k_a \frac{N}{2} i_a \cos \theta \quad (1)$$

onde k_a é um fator que leva em consideração a distribuição dos enrolamentos, N é o número de espiras da bobina "a" e i_a o valor instantâneo da corrente na fase "a".

De forma análoga é fácil observar que as fmm produzidas pelos outros enrolamentos ("b" e "c") podem ser escritas por:

$$F_{1b}(\theta) = k_b \frac{N}{2} i_b \cos(\theta - 2\pi/3) \quad (2)$$

$$F_{1c}(\theta) = k_c \frac{N}{2} i_c \cos(\theta + 2\pi/3) \quad (3)$$

Se a corrente aplicada nas bobinas for trifásica e equilibrada pode-se perceber facilmente que a fmm produzida por cada enrolamento terá um comportamento pulsante ao longo do seu eixo magnético.

$$\begin{aligned} F_{1a}(\theta) &= k_a \frac{N}{2} \sqrt{2} I \cos \omega t \cos \theta \\ F_{1b}(\theta) &= k_b \frac{N}{2} \sqrt{2} I \cos(\omega t - 2\pi/3) \cos(\theta - 2\pi/3) \\ F_{1c}(\theta) &= k_c \frac{N}{2} \sqrt{2} I \cos(\omega t + 2\pi/3) \cos(\theta + 2\pi/3) \end{aligned} \quad (4)$$

A fmm resultante será dada pela soma de cada uma destas ondas pulsantes nos seus respectivos eixos. Fazendo a soma obtém-se:

$$F_R(\theta) = \frac{3}{2} k \frac{N}{2} \sqrt{2} I \cos(\omega t - \theta) \quad (5)$$

A característica desta fmm (F_R) é diferente das fmm's descritas por (4). Observa-se que esta cosenóide tem amplitude constante e se desloca em θ a medida que o tempo passa. Este tipo de onda é chamado de "trafegante". A velocidade angular desta onda que se desloca no entreferro é ω .

Concluindo: o efeito de correntes defasadas no tempo, circulando em bobinas defasadas no espaço, produz um campo magnético girante no entreferro.

3) Tensão Induzida

Considere uma bobina parada no rotor. Qual seria a tensão induzida nesta bobina se fossem aplicadas tensões trifásicas no estator?

Tensões trifásicas no estator produzem correntes trifásicas que, como foi visto no item anterior, produzem um campo magnético girante. O fluxo concatenado com a bobina (parada) do rotor vai variar senoidalmente no tempo. A tensão induzida será dada por:

$$e_2 = \frac{d}{dt} \lambda_2 \quad (6)$$

Onde o subscrito “2” indica o enrolamento do rotor. Para calcular a variação do fluxo concatenado com a bobina do rotor (λ_2) é preciso calcular o fluxo.

$$\phi = \int B dA \quad (7)$$

$$B(\theta) = B_{\max} \cos \theta \quad (8)$$

$$\phi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B(\theta) l r d\theta \quad (9)$$

Onde “ l ” é o comprimento do rotor (ou a altura do cilindro do rotor), “ r ” é o raio do entreferro (praticamente igual ao raio do rotor). Portanto:

$$\phi = 2B_{\max} l r \quad (10)$$

Como este fluxo gira no entreferro a uma velocidade ω , o fluxo concatenado com a bobina (parada) do rotor será dado por:

$$\lambda_2 = N_2 \phi \cos \omega t \quad (11)$$

Aplicando (11) em (6) obtém-se:

$$e_2 = -\omega N_2 \phi \sin \omega t \quad (12)$$

O valor “rms” desta tensão senoidal induzida será:

$$E_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f N_2 \phi = 4,44 f N_2 \phi \quad (13)$$

Observa-se que a tensão induzida é função da frequência, do fluxo e do número de espiras do rotor. Normalmente as bobinas do rotor são distribuídas ao longo do entreferro. O fluxo total concatenado pelas N_2 espiras é menor que a soma algébrica do fluxo em cada uma das espiras. Para levar em conta este efeito, usa-se o “coeficiente de distribuição dos enrolamentos – K_{w2} ”. Uma expressão mais correta para o valor “rms” da tensão induzida é dado por:

$$E_2 = 4,44 f K_{w2} N_2 \phi \quad (14)$$

4) Funcionamento do Motor de Indução Trifásico

a) Rotor parado em aberto

O fluxo magnético girante no entreferro que induziu a tensão no rotor calculado no item anterior, induz também tensões no primário. Chamando de E_1 a tensão do primário, tem-se:

$$E_1 = 4,44 f K_{w1} N_1 \phi \quad (15)$$

Como os coeficientes de distribuição são números menores que um e, normalmente, muito parecidos, é possível relacionar as tensões do estator e do rotor com as de um transformador de dois enrolamentos:

$$\frac{E_1}{E_2} \cong \frac{N_1}{N_2} \quad (16)$$

É importante lembrar também que a tensão E_1 é diferente da tensão aplicada no estator V_1 . Existem duas quedas de tensão no estator: a queda de tensão na resistência da bobina e a queda de tensão devido à dispersão.

O comportamento do motor de indução é semelhante ao do transformador. A variação do fluxo concatenado, no caso do transformador, é devido à circulação de corrente alternada no primário e, no caso do motor, devido ao campo magnético girante.

Outra diferença interessante é que a tensão induzida no enrolamento parado do rotor pode estar adiantada ou atrasada em relação à tensão induzida no estator. Para isto basta alterar a posição do rotor. Toda esta análise está sendo feita por fase. Desta forma, o MIT pode ser usado como um transformador defasador.

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= E_1 \angle 0 \\ \bar{E}_2 &= E_2 \angle \beta \end{aligned} \quad (17)$$

Usando esta característica de tensão induzida no rotor em função da posição mecânica (β), o motor de indução pode também ser usado como um controlador de tensão. A figura mostra a tensão de saída.

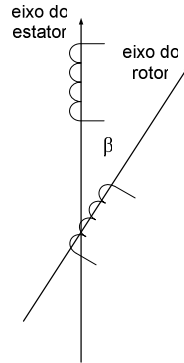


Figura 4

A tensão de saída pode variar de zero até duas vezes a tensão de entrada de forma contínua. Este ajuste de tensão não é muito usado devido ao elevado preço, a grande dispersão e a corrente de magnetização necessária para produzir um fluxo na relutância do entreferro.

b) Rotor em movimento e em curto

Se as bobinas do rotor forem curto circuitadas a tensão induzida vai provocar a circulação de uma corrente. Essa corrente estará limitada apenas pela resistência do rotor (R_2) e pela dispersão do enrolamento do rotor (L_2).

Considere inicialmente que o rotor esteja rodando à velocidade síncrona (ω_s).

Por alguma razão histórica a velocidade dos motores de indução é dada em rotações por minuto (rpm). Como:

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n \quad (18)$$

A transformação da velocidade de radianos por segundo (rad/s) para rpm é direta. Vai-se usar “ n ” para indicar a velocidade do rotor. Então, neste caso particular:

$$n = n_s \quad (19)$$

Onde “ n_s ” é a velocidade síncrona, ou seja, a velocidade de rotação do campo magnético girante em rotações por minuto (rpm). Para uma máquina de “ p ” pólos, tem-se:

$$n_s = \frac{120}{p} f \quad (20)$$

Neste caso, não haverá variação do fluxo na bobina do rotor, portanto, não haverá nem tensão induzida nem corrente. Sem corrente não há torque. Conclui-se que o MIT não pode operar na velocidade síncrona. Por esta razão é também chamado de motor “assíncrono”.

A velocidade relativa do rotor em relação ao campo magnético girante é chamada de “escorregamento” (s).

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} \quad (21)$$

Tomando o rotor como referência, que está girando a uma velocidade “ n ”, o campo magnético girante varia na bobina do rotor na chamada “velocidade de escorregamento”.

$$sn_s = n_s - n \quad (22)$$

A frequência da tensão induzida será igual à frequência da variação do fluxo, portanto, igual à frequência de escorregamento.

$$n_s = \frac{120}{p} f_1 \quad (23)$$

Onde f_1 é a frequência da corrente de alimentação do estator, normalmente a frequência síncrona.

$$f_2 = \frac{p}{120} sn_s = sf_1 \quad (24)$$

Onde f_2 é a frequência da tensão induzida na bobina do rotor.

Como foi visto, o valor da tensão induzida é proporcional à frequência, então:

$$E_2(s) = 4,44 f_2 N_2 \phi K_{w2} = sE_2 \quad (25)$$

O que ocorre no rotor, portanto, é a indução de uma tensão trifásica na frequência de escorregamento ($f_2 = sf_1$). Se o rotor estiver curto-circuitado, haverá a circulação de uma corrente trifásica no rotor de frequência f_2 .

Foi visto no item anterior que uma corrente trifásica circulando em bobinas defasadas provoca um campo magnético girante na velocidade da frequência induzida. O campo magnético girante do rotor terá, portanto, a velocidade do escorregamento ($n_2 = sn_s$).

Visto do estator, a velocidade do campo produzido pelo rotor será a superposição do efeito da velocidade de rotação do rotor e do campo magnético girante produzido pelas correntes no rotor:

$$n + n_2 = (1 - s)n_s + sn_s = n_s \quad (26)$$

Os dois campos rodam em sincronismo na mesma velocidade, seja qual for a frequência da corrente induzida no rotor.

Estes dois campos (que rodam sincronamente no entreferro) podem ser visualizados como dois ímãs um tendendo a se alinhar com o outro de forma a minimizar a energia armazenada no entreferro. Produz-se, desta forma, um torque constante no eixo do rotor.

Exemplo 1

Um motor de indução trifásico de 230 V, 50 Hp, 60 Hz, 6 pólos, entrega a potência nominal com um escorregamento de 5%. Calcular:

- A velocidade do campo magnético girante, ns.
- A frequência da corrente do rotor.
- A velocidade do rotor.
- A tensão induzida na bobina do rotor supondo que a relação de transformação seja 3:1.

Solução

$$a) n_s = \frac{120}{p} f_1 = 1200 \text{ rpm}$$

$$b) f_2 = sf_1 = 0,05 \times 60 = 3 \text{ Hz}$$

$$c) n = (1 - s)n_s = 0,95 \times 1200 = 1140 \text{ rpm}$$

$$d) E_2(s) = sE_2 = s \frac{N_2}{N_1} E_1 \cong s \frac{N_2}{N_1} V_1 = 0,05 \times \frac{1}{3} \times \frac{230}{\sqrt{3}} = 2,21 \text{ V / fase}$$

5) Modos de operação do MIT

a) Motor

A forma normal de operação do MIT é como motor. A velocidade de rotação fica entre zero e a velocidade síncrona.

$$\begin{aligned} 0 \leq n \leq n_s \\ 1 \geq s \geq 0 \end{aligned} \quad (27)$$

b) Gerador

Se o MIT for acionado mecanicamente acima da sua velocidade de rotação do campo girante, ($n > n_s$), o torque produzido será negativo, ou seja, o campo magnético do rotor estará a frente do campo do estator. As corrente que circulam no enrolamento do estator produzem um campo que tende a frear o movimento do rotor.

Uma forma possível de se utilizar o motor como gerador é usando uma fonte controlada com frequência variável. Reduzindo a frequência da corrente de alimentação o campo produzido ficará mais lento que a velocidade do rotor. A velocidade do rotor não se altera instantaneamente. Este processo é chamado de frenagem regenerativa.

c) Frenagem

O terceiro modo de operação é o de frenagem rápida. Invertendo a ligação de duas fases do estator, o campo magnético passa a girar no sentido oposto. Este efeito provoca a inversão de rotação do rotor. Se a troca de fase é feita rapidamente e em seguida o motor é desligado ele sofrerá uma parada brusca. Para alguns tipos de acionamento esta frenagem rápida é importante.

Exemplo 2

Qual o escorregamento do motor após a inversão de duas fases?

Solução

$$s = \frac{n_s - n}{n_s}$$

A velocidade de rotação do rotor, que é sempre aproximadamente igual à velocidade síncrona, estará no sentido oposto ao campo magnético girante. Então:

$$\begin{aligned} n &\cong -n_s \\ s &= 2 \end{aligned}$$

d) Motor de indução invertido

Se for aplicada uma tensão trifásica nos enrolamentos do rotor, a circulação das correntes trifásicas vai produzir um campo magnético girante no entreferro. Este campo induz tensões nos enrolamentos do estator. Se os enrolamentos do estator forem curto circuitados haverá a circulação de correntes trifásicas e a produção de um torque.

Supondo que o rotor seja fixo, o “estator” vai rodar. Alguns ventiladores são feitos desta forma.

6) Circuito Equivalente do Motor

Vamos desenvolver o circuito equivalente do MIT. A descrição do motor através do seu circuito equivalente ajuda a prever o comportamento do motor em diversas situações operativas em regime permanente.

Toda a análise será feita por fase.

Como foi dito, o MIT é composto por bobinas acopladas magneticamente. As bobinas do estator, quando ligadas a uma fonte trifásica de tensão alternada, produzem um campo magnético girante na frequência da corrente da rede.

O campo magnético produzido pelas correntes induzidas no rotor também gira à mesma velocidade síncrona (n_s).

Evidentemente, o fluxo resultante da composição dos fluxos produzidos pelo rotor e estator, também gira no entreferro na velocidade síncrona.

Este campo induz uma tensão no estator na frequência da rede (f_1). No rotor a tensão induzida é na frequência de escorregamento ($f_2 = sf_1$).

O fluxo variando em uma bobina nos leva a usar o circuito equivalente do transformador. É interessante representar a indutância de magnetização e as perdas no ferro no lado do estator.

a) Estator

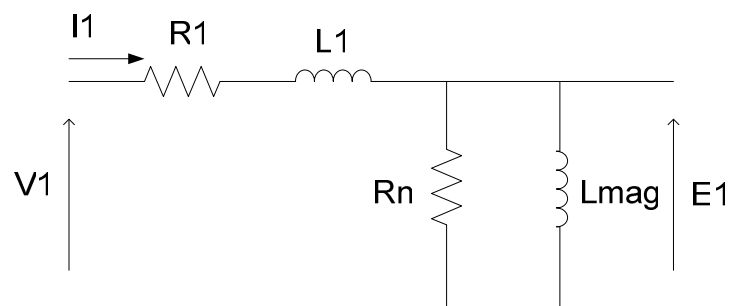


Figura 5: Circuito equivalente do estator

Onde

V_1 tensão fase-neutro do estator;

R_1 resistência do enrolamento do estator;

$X_1 = j\omega L_1$ reatância de dispersão do estator;

E_1 tensão fase-neutro induzida no estator;

$X_{mag} = j\omega L_{mag}$ reatância de magnetização; e

R_n resistência de perdas no núcleo.

A diferença principal entre este circuito e o primário de um transformador é o valor numérico da reatância de magnetização. De fato, como a indutância de magnetização é inversamente proporcional à relutância e a relutância do entreferro é muito maior que a relutância do transformador, o valor numérico da reatância no transformador é muito grande e pode, normalmente, ser desprezada. No caso do motor, a reatância é relativamente pequena e não pode ser desprezada.

A corrente de magnetização em motor de indução é da ordem de 30% da corrente de carga podendo chegar, em algumas situações, até a 50%. No caso do transformador esta corrente é relativamente pequena (menor que 5%) e, normalmente, é desprezada.

b) Rotor

A representação do rotor é muito simples. É a tensão induzida em um enrolamento em curto circuito. A impedância vista pela tensão será a resistência do enrolamento (R_2) e a indutância de dispersão (L_2).

Se E_2 é a tensão induzida no rotor parado, como foi visto, a tensão induzida no rotor em rotação será sE_2 .

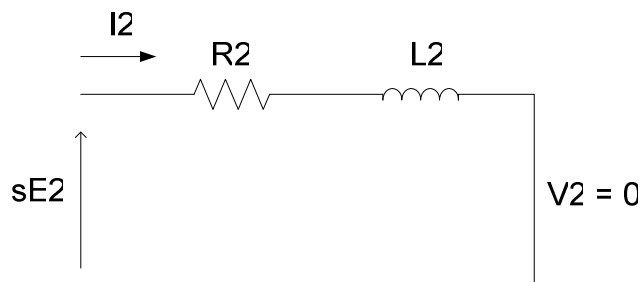


Figura 6: Circuito equivalente do rotor.

A frequência do que ocorre no rotor é a frequência de escorregamento ($f_2 = sf_1$). O valor fasor de corrente é dado por:

$$\bar{I}_2 = \frac{s\bar{E}_2}{R_2 + jsX_2} \quad (28)$$

Que pode ser reescrito como:

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{E}_2}{\frac{R_2}{s} + jX_2} \quad (29)$$

As duas equações acima podem parecer iguais mas não são. A primeira está na frequência da tensão induzida no rotor (f_2). A segunda está na frequência da rede (f_1). Esta equação mostra o que ocorre no rotor “visto” do estator.

A potência dissipada na equação (28) é dada por:

$$P_2 = R_2 I_2^2 \quad (30)$$

Este valor corresponde às perdas no enrolamento do rotor.

A potência na equação (29) representa o que o estator transfere para o entreferro. Ela é usualmente chamada de “potência de entreferro” ou, P_{gap} .

$$P_{gap} = \frac{R_2}{s} I_2^2 \quad (31)$$

Como em operação normal o escorregamento é inferior a 10%, a potência transferida para o entreferro é muito maior que as perdas no enrolamento do rotor.

Em alguns casos é conveniente dividir a potência do entreferro em duas parcelas: a primeira relativa às perdas, a outra relativa a potência mecânica disponível no eixo.

$$P_{mec} = \frac{R_2(1-s)}{s} I_2^2 \quad (32)$$

Evidentemente:

$$P_{gap} = P_{mec} + P_2 \quad (33)$$

$$P_{gap} = \frac{R_2(1-s)}{s} I_2^2 + R_2 I_2^2 = \frac{R_2}{s} I_2^2 \quad (34)$$

Para representar esta diferença, o circuito equivalente do rotor, visto do estator, pode ser representado pela figura 7.

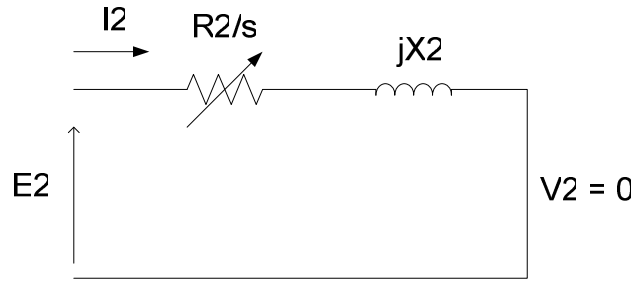


Figura 7: Circuito equivalente do rotor

É interessante observar a relação entre as três potências que foram definidas.

P_{gap} potência de entreferro

P_{mec} potência mecânica disponível no eixo

P_2 perdas no enrolamento do rotor.

Se a potência transferida para o entreferro for igual a 1, as perdas no rotor serão iguais a “s” e a potência disponível no eixo será (1-s). Quanto maior o escorregamento menor será o rendimento do motor. A faixa normal de operação do MIT é sempre para escorregamentos menores que 10%.

A potência de saída (P_{out}) é sempre menor que a potência disponível no eixo. A diferença são as perdas mecânicas de ventilação e atrito.

Voltando ao circuito equivalente, observa-se que a diferença entre as tensões E_1 e E_2 é dada pela relação de transformação entre as bobinas. Normalmente considera-se que os coeficientes de distribuição dos enrolamentos do estator e do rotor são iguais. Então, refletindo o que ocorre no rotor para o estator tem-se:

$$\begin{aligned}\bar{E}'_2 &= \frac{N_1}{N_2} \bar{E}_2 \\ X'_2 &= \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 X_2 \\ R'_2 &= \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 R_2\end{aligned}\tag{35}$$

As grandezas com apóstrofo correspondem aos valores em ohms refletidos ao estator. Em todas as análises do motor de indução o que interessa é o circuito equivalente refletido ao

estator. Para não sobrecarregar a notação, no texto a seguir, vai-se eliminar o apóstrofo sabendo que estamos falando do valor da resistência e da reatância refletidos ao estator. O circuito equivalente por fase será dado por:

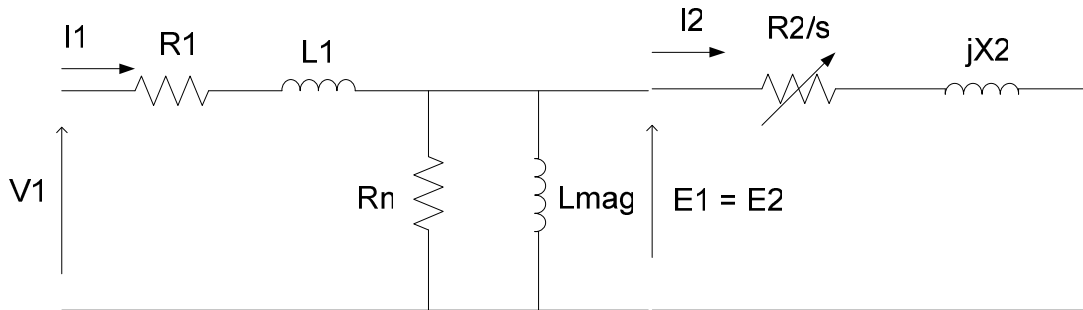


Figura 8: Circuito equivalente por fase do MIT.

Como esperado, o circuito equivalente é muito parecido com o do transformador.

Exemplo 3

Um motor de indução trifásico de 20 HP, 450 V, 4 pólos, 60 Hz, 1730 rpm, opera acionando a sua potência nominal. As perdas mecânicas são de 860 W. Qual a potência transferida para o entreferro?

Solução

$$P_{out} = 20 \cdot 746(\text{W/HP}) = 14.920 \text{ W}$$

$$P_{mec} = P_{out} + \text{Perdas}(mec) = 14.920 + 860 = 15.780 \text{ W}$$

$$s = \frac{n_s - n}{n_s} = \frac{1800 - 1730}{1800} = 3,9\%$$

$$P_{gap} = \frac{P_{mec}}{(1 - s)} = 16.418,5 \text{ W}$$

6.1) Simplificações no Circuito Equivalente do MIT

Observa-se na figura 8 que, para cada velocidade de operação, o circuito equivalente apresenta uma configuração diferente. Observa-se ainda que não é possível desprezar a reatância de magnetização. A simplificação possível (e recomendável) do circuito equivalente consiste em representar as perdas no ferro como parte das perdas mecânicas.

As perdas no núcleo, representadas no circuito equivalente pela resistência R_n , são proporcionais à frequência. Para baixos valores de escorregamento a frequência da

corrente induzida no rotor é baixa. As perdas devem ser menores. Portanto, a representação pela resistência constante R_n não é precisa.

Por outro lado, para baixos valores de escorregamento (na operação normal do MIT) as perdas por atrito e ventilação aumentam. Em geral elas são proporcionais à velocidade.

Para juntar estes dois efeitos opostos, o IEEE recomenda que as perdas no ferro e as perdas por atrito e ventilação sejam representadas em conjunto. Este conjunto é normalmente chamado de perdas rotacionais (P_{rot}).

Com esta simplificação o circuito equivalente é mostrado pela figura 9.

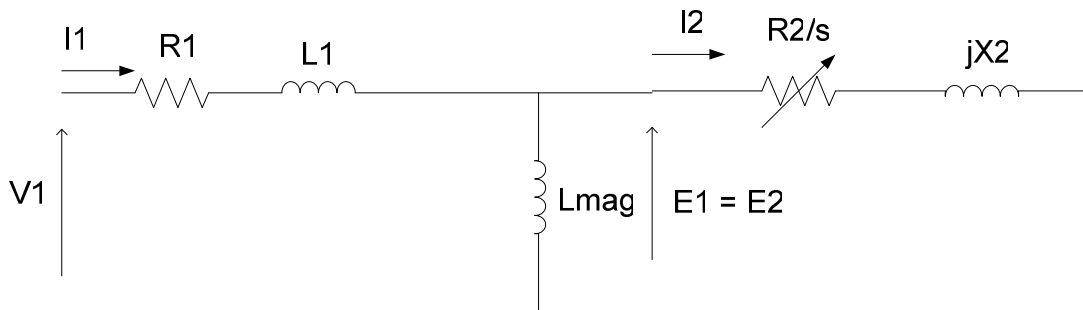


Figura 9: Circuito equivalente simplificado

Observe que, neste caso, o circuito simplificado representa melhor o que ocorre no motor que o circuito completo. Este modelo será usado na análise do MIT dos próximos itens.

6.2) Thévenin Equivalente

Para analisar o desempenho de um motor, em função da carga, é interessante simplificar o circuito de forma a não ter que calcular a corrente de magnetização para cada velocidade. Para saber o que ocorre no rotor (refletido ao estator) usa-se o circuito “Thevenin equivalente”. O circuito equivalente é mostrado abaixo.

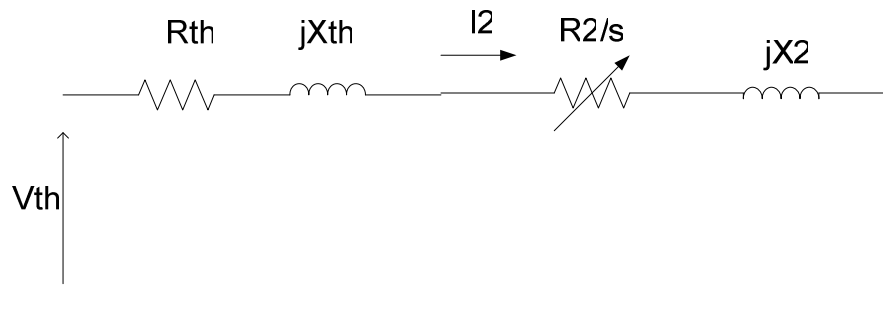


Figura 10: Circuito Thevenin equivalente

A tensão de Thevenin, V_{th} , é calculada pelo divisor de tensão:

$$V_{th} = \frac{X_{mag}}{(R_1^2 + (X_1 + X_{mag})^2)^{1/2}} V_1 \quad (36)$$

A impedância de Thevenin, Z_{th} , é dado pelo paralelo:

$$Z_{th} = \frac{jX_{mag}(R_1 + jX_1)}{R_1 + j(X_1 + X_{mag})} = R_{th} + jX_{th} \quad (37)$$

Então

$$R_{th} = \frac{X_{mag}^2}{R_1^2 + (X_1 + X_{mag})^2} R_1 \quad (38)$$

$$X_{th} = \frac{X_{mag} R_1^2 + X_1 X_{mag} (X_1 + X_{mag})}{R_1^2 + (X_1 + X_{mag})^2} \quad (39)$$

Normalmente, não é necessário fazer nenhum tipo de simplificação para o cálculo de V_{th} e de Z_{th} , no entanto, para avaliar a ordem de grandeza das grandezas calculadas, pode-se fazer a seguinte consideração:

$$R_1 \ll (X_1 + X_{mag}) \quad (40)$$

Então:

$$V_{th} \cong \frac{X_{mag}}{(X_1 + X_{mag})} V_1 \quad (41)$$

$$R_{th} \cong \frac{X_{mag}^2}{(X_1 + X_{mag})^2} R_1 \quad (42)$$

Considerando ainda que $X_1 \ll X_{mag}$, tem-se:

$$X_{th} \cong X_1 \quad (43)$$

Para finalizar, é necessário medir os parâmetros do circuito equivalente do motor.

7) Ensaios em vazio e com o rotor bloqueado

O ensaio em vazio é feito aplicando a tensão nominal no estator (na frequência da rede) e deixando o rotor livre, sem carga mecânica.

A potência ativa medida neste ensaio difere das perdas rotacionais apenas das perdas no cobre do estator. É bom lembrar que as perdas rotacionais representam o atrito, a ventilação e as perdas no núcleo.

O ensaio com o rotor bloqueado é semelhante ao ensaio em curto circuito do transformador e é usado para medir a resistência e a reatância de dispersão. Tanto a resistência quanto a dispersão variam com a frequência. Recomenda-se, quando for possível, fazer o ensaio com o rotor bloqueado com tensão inferior à tensão nominal e com frequência reduzida. A frequência das correntes do rotor é a frequência de escorregamento e, normalmente, é muito menor que a nominal.

Os cálculos dos parâmetros do circuito equivalente vão ser feitos através de um exemplo.

Exemplo 4

Um motor de indução trifásico, 60 HP, 2200 V, 6 pólos, 60 Hz, tem a resistência do estator por fase medida igual a 2,8 ohms. Calcular os parâmetros do circuito equivalente do motor sabendo que foram feitos os ensaios em vazio e com o rotor bloqueado e obtido os seguintes valores:

a) Ensaio em vazio (NL)

$$V_{NL} = 2.200 \text{ V}$$

$$f = 60 \text{ Hz}$$

$$I_{NL} = 4,5 \text{ A}$$

$$P_{NL} = 1.600 \text{ W}$$

b) Ensaio com rotor bloqueado (BL).

$$V_{BL} = 270 \text{ V}$$

$$f_{BL} = 15 \text{ Hz}$$

$$I_{BL} = 25 \text{ A}$$

$$P_{BL} = 9.000 \text{ W}$$

Solução

Do ensaio em vazio tem-se:

$$P_{rot} = P_{NL} - 3.R_1.I_{NL}^2 = 1600 - 3 \times 2,8 \times 4,5^2 = 1.429,9 \text{ W}$$

O circuito equivalente em vazio é parecido com o circuito do transformador em aberto. De fato, como $n \rightarrow n_s$, $s \approx 0$, $R_2/s \rightarrow \infty$.

$$V_1 = \frac{2.200}{\sqrt{3}} = 1.270 \text{ V}$$

$$Z_{NL} = \frac{V_1}{I_{NL}} = \frac{1.270}{4,5} = 282,26\Omega$$

A potência medida no ensaio em vazio se refere às perdas no cobre do estator e às perdas rotacionais, então:

$$R_{NL} = \frac{P_{NL}}{3I_{NL}^2} = \frac{1.600}{3 \times 4,5^2} = 26,34\Omega$$

$$X_{NL} = X_1 + X_{mag} = \sqrt{Z_{NL}^2 - R_{NL}^2} = 281,03\Omega$$

Do ensaio com o rotor bloqueado, vem:

$$R_{BL} = \frac{P_{BL}}{3I_{BL}^2} = \frac{9.000}{3 \times 25^2} = 4,8\Omega$$

$$R = R_{BL} - R_1 = 2\Omega$$

Usando o mesmo procedimento do cálculo da impedância de Thevenin, tem-se:

$$R = \frac{X_{mag}^2}{R_2^2 + (X_2 + X_{mag})^2} R_2$$

$$X = \frac{X_{mag} R_2^2 + X_2 X_{mag} (X_2 + X_{mag})}{R_2^2 + (X_1 + X_{mag})^2}$$

Considerando $R_2 \ll (X_2 + X_{mag})$, vem:

$$R \cong \frac{X_{mag}^2}{(X_2 + X_{mag})^2} R_2$$

$$X \cong X_2$$

A impedância de rotor bloqueado será:

$$Z_{BL} = \frac{V_{BL}}{\sqrt{3} \times I_{BL}} = \frac{270}{\sqrt{3} \times 25} = 6,24\Omega$$

$$X_{BL} = \sqrt{Z_{BL}^2 - R_{BL}^2} = \sqrt{6,24^2 - 4,8^2} = 3,98\Omega$$

Como este ensaio não foi feito na frequência nominal:

$$X_{BL}(60Hz) = \frac{60}{15} X_{BL}(15) = 15,92\Omega$$

Esta reatância corresponde à dispersão do primário e o paralelo da magnetização com a dispersão do secundário. Não é possível, com estes ensaios, isolar cada um destes parâmetros. O que se faz são duas simplificações. Despreza-se a magnetização e considera-se que as dispersões do primário e do secundário sejam iguais.

$$X_{BL} = X_1 + X \cong X_1 + X_2$$

$$X_1 = X_2 = \frac{X_{BL}}{2} = 7,96\Omega$$

Com esta simplificação é fácil calcular a reatância de magnetização.

$$X_{mag} = X_{NL} - X_1 = 273,04\Omega$$

Finalmente,

$$R_2 \cong \frac{(X_2 + X_{mag})^2}{X_{mag}^2} R = 2,12\Omega$$

Todos os parâmetros foram calculados e o circuito equivalente completamente definido.

8) Característica de operação do MIT

O circuito equivalente desenvolvido no item anterior permite determinar as características de operação do MIT. Uma característica importante é a variação do torque com a velocidade.

a) Torque em função da velocidade

A expressão para o torque pode ser derivada diretamente da definição da potência disponível no eixo:

$$T_{mec} = \frac{P_{mec}}{\omega} \quad (44)$$

Como

$$\begin{aligned} \omega &= (1-s)\omega_s \\ P_{mec} &= (1-s)P_{gap} \end{aligned} \quad (45)$$

Então

$$T_{mec} = \frac{P_{gap}}{\omega_s} \quad (46)$$

A potência transferida para o entreferro já foi calculada em (31), considerando a potência trifásica tem-se:

$$P_{gap} = 3 \frac{R_2}{s} I_2^2 \quad (47)$$

Para calcular o torque em função da velocidade é preciso conhecer o módulo da corrente do rotor ao quadrado.

$$I_2^2 = \frac{V_{th}^2}{(R_{th} + \frac{R_2}{s})^2 + (X_{th} + X_2)^2} \quad (48)$$

Então:

$$T_{mec} = 3 \frac{V_{th}^2}{(R_{th} + \frac{R_2}{s})^2 + (X_{th} + X_2)^2} \cdot \frac{R_2}{s} \cdot \frac{1}{\omega_s} \quad (49)$$

É possível traçar a curva (T x n) já que velocidade (n) e escorregamento estão relacionados. Quando a velocidade varia de 0 à velocidade síncrona (n_s), o escorregamento varia de 1 a 0.

Antes de traçar a curva exata convém observar que, para pequenos escorregamentos, o conjugado é diretamente proporcional ao escorregamento. De fato, para “s” pequeno:

$$T_{mec} \cong 3 \frac{V_{th}^2}{R_2} \cdot \frac{s}{\omega_s} \quad (50)$$

No outro extremo, durante a partida onde o valor de “s” é próximo da unidade, as reatâncias são maiores que as resistências e o torque fica inversamente proporcional ao escorregamento. Neste caso:

$$T_{mec} \cong 3 \frac{V_{th}^2}{(X_{th} + X_2)^2} \cdot \frac{R_2}{s} \cdot \frac{1}{\omega_s} \quad (51)$$

A característica T x n é mostrada na figura 13.

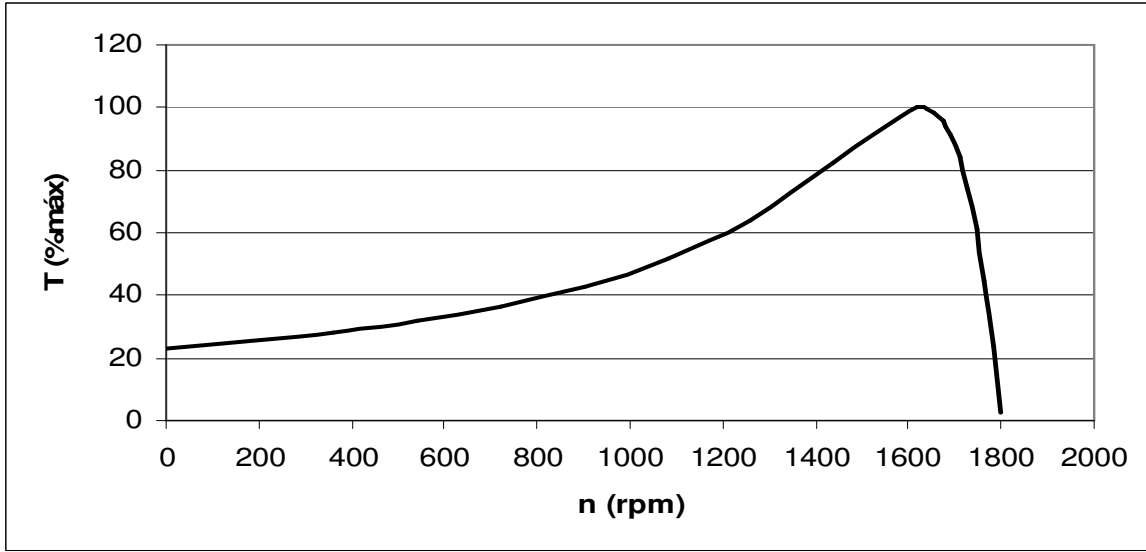


Figura 11: Característica T x n

Observa-se que, na partida, o torque é diferente de zero e que, na velocidade síncrona (n_s) ele é nulo, como foi visto. Observa-se também que a característica passa por um ponto de máximo.

Para determinar o escorregamento onde ocorre o máximo torque ($s_{Tmáx}$) basta derivar a expressão (49) e igualar a zero.

$$\frac{R_2}{s_{Tmáx}} = (R_{th}^2 + (X_{th} + X_2)^2)^{1/2} \quad (52)$$

É possível chegar à mesma conclusão por casamento de impedância no circuito equivalente de Thevenin.

Substituindo o escorregamento de máximo torque na expressão do torque obtém-se:

$$T_{máx} = 3 \frac{1}{2\omega_s} \frac{V_{th}^2}{R_{th} + (R_{th}^2 + (X_{th} + X_2)^2)^{1/2}} \quad (53)$$

É interessante observar que o torque máximo independe da resistência do rotor (R_2). A velocidade onde ocorre o máximo torque diminui com o aumento da resistência, no entanto o seu valor é o mesmo. A figura 11 mostra a característica conjugado velocidade, em porcentagem do conjugado máximo, de uma máquina de 4 pólos, com três valores diferentes de resistência do rotor.

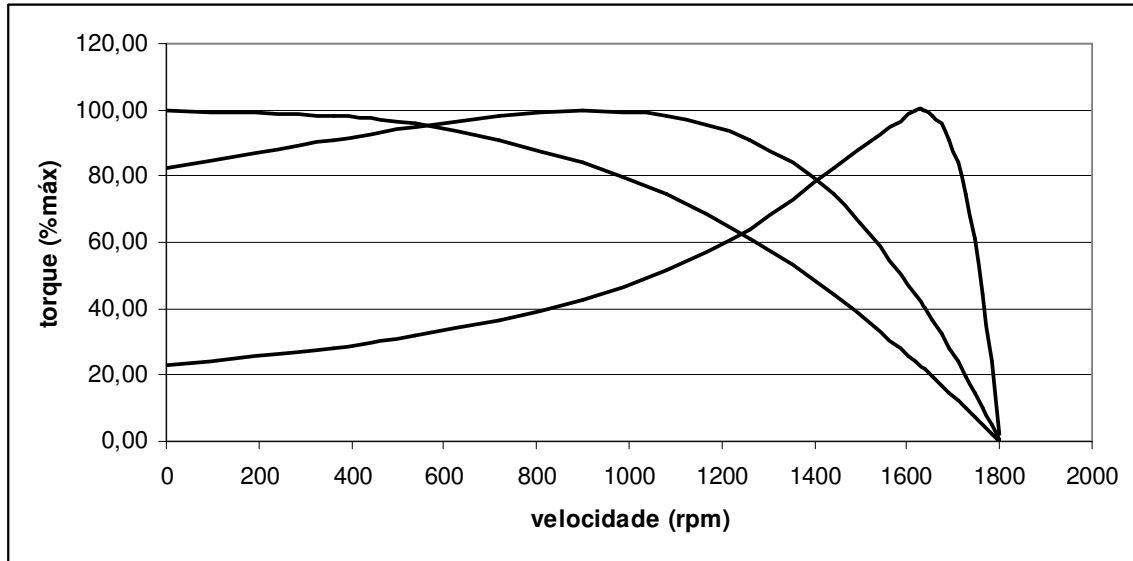


Figura 11: T x n para três valores diferentes de R_2

É possível ajustar uma resistência externa ao rotor (de um motor bobinado) para obter o torque máximo em qualquer velocidade. Observe também que a resistência externa ao rotor pode ser usada para controlar a velocidade.

Se a resistência do estator (R_1) for pequena comparada com a dispersão ($X_{th} + X_2$), então, pode-se estimar um valor aproximado para o escorregamento de máximo torque e para o torque máximo.

$$s_{Tmáx} \cong \frac{R_2}{(X_{th} + X_2)} \quad (54)$$

$$T_{máx} \cong 3 \frac{1}{2\omega_s} \frac{V_{th}^2}{(X_{th} + X_2)} \quad (55)$$

Quanto maior a dispersão, menor será o torque máximo.

A relação entre o torque máximo e o torque também pode ser facilmente obtida:

$$\frac{T_{m\acute{a}x}}{T_{mec}} = \frac{(R_{th} + \frac{R_2}{s})^2 + (X_{th} + X_2)^2}{(\frac{R_2}{s_{Tm\acute{a}x}})^2 + (X_{th} + X_2)^2} \cdot \frac{s}{s_{Tm\acute{a}x}} \quad (56)$$

Se a resist\encia do estator (R_1) e, por consequ\encia, a resist\encia de Thevenin forem desprezadas:

$$\frac{T_{m\acute{a}x}}{T_{mec}} \cong \frac{(\frac{R_2}{s})^2 + (X_{th} + X_2)^2}{(\frac{R_2}{s_{Tm\acute{a}x}})^2 + (X_{th} + X_2)^2} \cdot \frac{s}{s_{Tm\acute{a}x}} \quad (57)$$

Para pequenos valores de escorregamento:

$$\frac{T_{m\acute{a}x}}{T_{mec}} \cong \frac{(\frac{R_2}{s})^2 + (X_{th} + X_2)^2}{(\frac{R_2}{s_{Tm\acute{a}x}})^2 + (X_{th} + X_2)^2} \cdot \frac{s}{s_{Tm\acute{a}x}} \quad (58)$$

Substituindo (54) na express\ao (58) tem-se:

$$\frac{T_{m\acute{a}x}}{T_{mec}} \cong \frac{(\frac{R_2}{s})^2 + (\frac{R_2}{s_{Tm\acute{a}x}})^2}{2(\frac{R_2}{s_{Tm\acute{a}x}})^2} \cdot \frac{s}{s_{Tm\acute{a}x}} \quad (59)$$

Ent\ao:

$$\frac{T_{m\acute{a}x}}{T_{mec}} \cong \frac{s_{Tm\acute{a}x}^2 + s^2}{2s_{Tm\acute{a}x}s} \quad (60)$$

b) Corrente do Estator

A corrente do motor, por fase, \e dada pela rela\cao entre a tens\ao aplicada e a imped\ancia vista do circuito equivalente.

$$\bar{I}_1 = \frac{\bar{V}_1}{(R_1 + jX_1) + [jX_{mag} // (\frac{R_2}{s} + jX_2)]} \quad (61)$$

Observe que a corrente do estator é diferente da corrente do “Thevenin equivalente”. O valor máximo do módulo da corrente ocorre na partida quando $s = 1$.

Dados os parâmetros de um motor de indução trifásico, é fácil traçar a curva do módulo da corrente em função da velocidade. A figura 12 mostra esta característica.

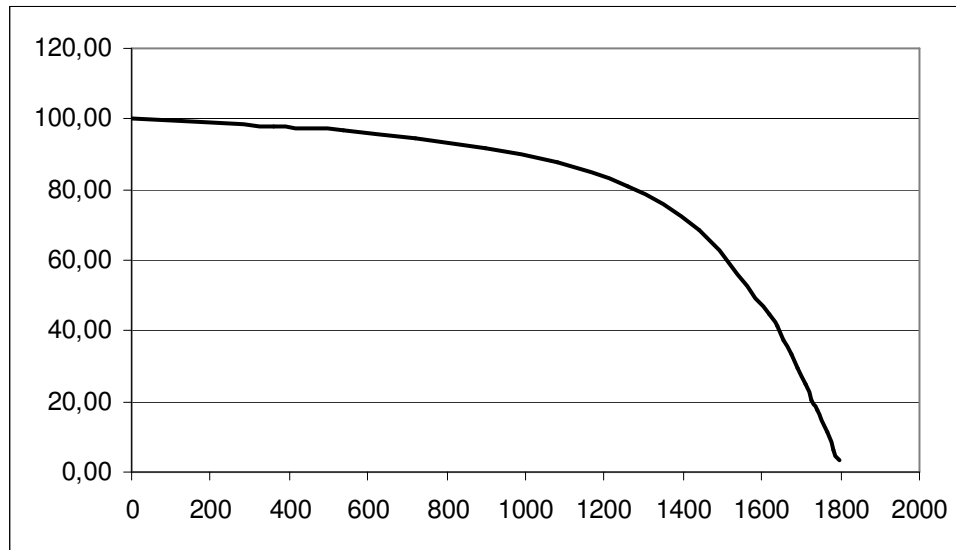


Figura 12: Corrente do estator (%máxima) em função da velocidade em rpm

Note que neste exemplo o motor tem quatro pólos e a corrente máxima é da ordem de 5 vezes a corrente de operação normal.

c) Fator de potência

Para se calcular o fator de potência do MIT basta obter o coseno da defasagem entre a tensão e a corrente de entrada. A figura 13 mostra um exemplo de cálculo do fator de potência em função da velocidade para uma máquina de 4 pólos.

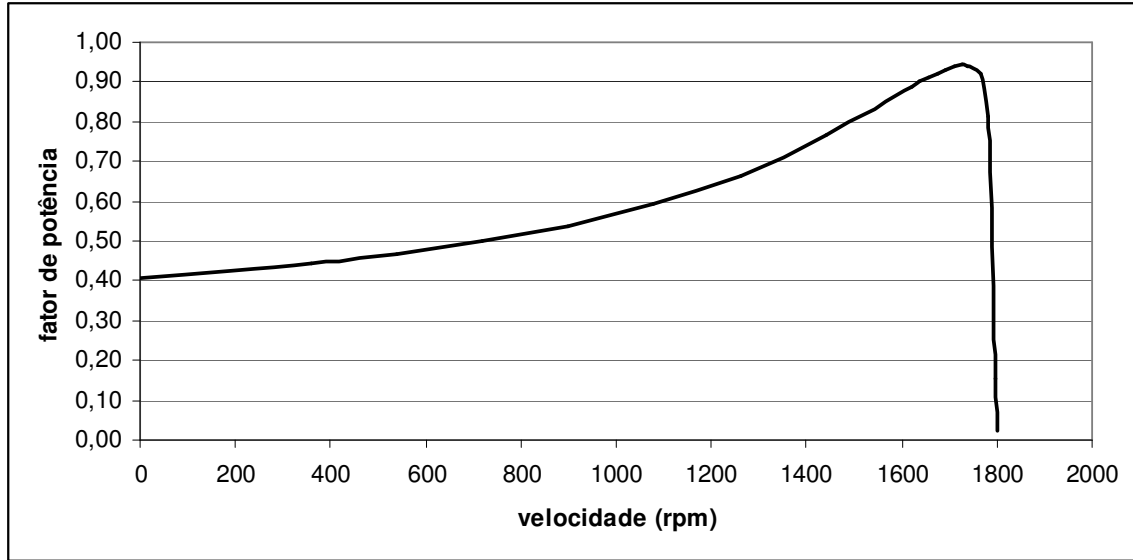


Figura 13: fator de potência em função da velocidade (rpm)

O fator de potência de um MIT é sempre indutivo e, para que ele opere próximo da unidade é preciso que o escorregamento esteja próximo de zero.

d) Rendimento

O rendimento, por definição, é a relação entre a potência de saída e a potência de entrada.

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (62)$$

A potência de entrada é dada por:

$$P_{in} = 3V_1 I_1 \cos \phi \quad (63)$$

Esta potência difere daquela que passa no entreferro (P_{gap}) das perdas no cobre do estator. A potência de saída (P_{out}) difere da potência disponível no eixo (P_{mec}) das perdas rotacionais (P_{rot}).

$$P_{in} = 3R_1 I_1^2 + P_{gap} \quad (64)$$

$$P_{out} = P_{mec} - P_{rot} \quad (65)$$

Desprezando-se as perdas no cobre e a perda rotacional, o rendimento pode ser calculado aproximadamente por:

$$\eta \cong \frac{P_{mec}}{P_{gap}} = (1 - s) \quad (66)$$

A equação mostra que quanto mais perto da velocidade síncrona maior será o rendimento (ideal) do motor. A figura 14 mostra a característica rendimento versus velocidade para um motor típico de 4 pólos.

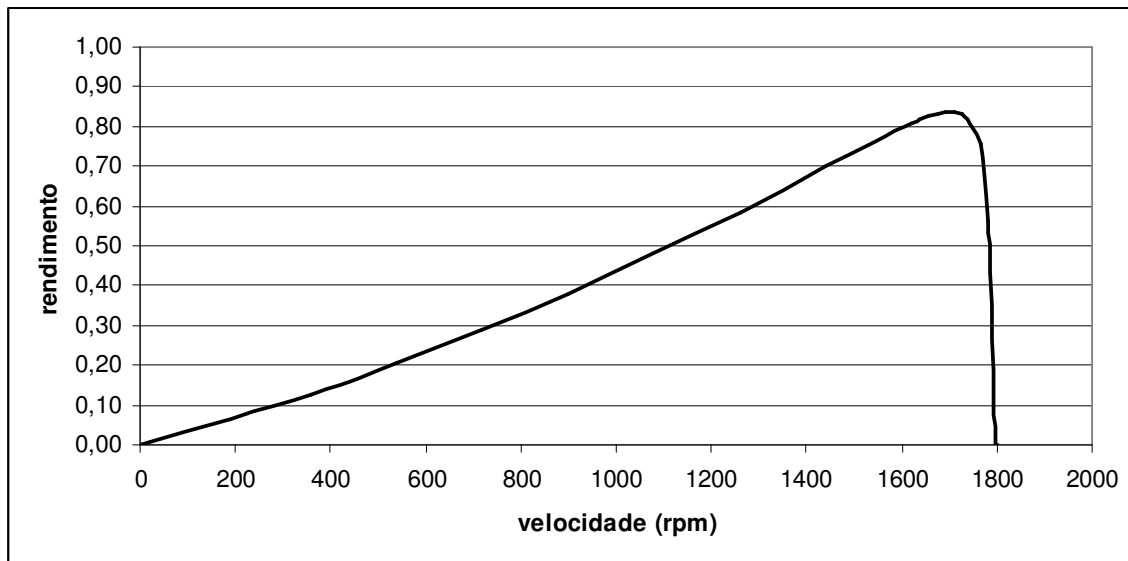


Figura 14: rendimento (%) x velocidade (rpm)

Exemplo 5

Considere um MIT, 60 Hz, 500 V, 1740 rpm, 4 pólos, com os seguintes parâmetros:

$$R_1 = 0,3 \, \Omega$$

$$R_2 = 0,25 \, \Omega$$

$$X_1 = X_2 = 0,55 \, \Omega$$

$$X_{mag} = 32 \, \Omega$$

$$P_{rot} = 1.500 \, \text{W}$$

Calcular:

- O torque de partida
- O torque máximo
- A velocidade onde ocorre o torque máximo
- A corrente de partida
- O escorregamento nominal
- A corrente do motor em condições nominais.
- O rendimento do motor em condições nominais.

Solução

a) $T(\text{partida}) = 215,49 \text{ Nm}$

b) $T_{\text{máx}} = 450,97 \text{ Nm}$

c) $s_{T_{\text{máx}}} = 22,10\%$

d) $I_1 (s=1) = 236,73 \text{ A}$

e) $s = 3,33\%$

f) $I_{1n} = 37,65 \text{ A}$

g) $\eta = 88\%$

9) Efeito da resistência do rotor

Foi visto no item anterior que o torque máximo ($T_{\text{máx}}$) independe do valor da resistência do rotor (R_2). No entanto, a velocidade onde ocorre é função do valor dessa resistência. É interessante usar essa característica para, por exemplo, aumentar a aceleração da máquina durante a partida.

A corrente de partida do motor, como foi visto, é muito maior que a corrente nominal. Se o motor demora a partir, ele estará sujeito a altos valores de corrente durante muito tempo podendo se danificar.

O torque acelerante do motor é a diferença entre o torque elétrico e o torque mecânico da carga. Quanto maior for o torque de partida, mais rápida será a aceleração do motor e menor será o desgaste provocado pelas altas correntes da partida. Acrescentar resistências em série com o rotor, como foi visto na figura 11, produz este efeito além de reduzir a corrente durante a partida.

Em operação normal é interessante retirar a resistência externa para que o motor opere com escorregamentos mais baixos e com maior rendimento.

O ideal, portanto, é colocar resistência na partida e retirar em operação normal.

a) rotor gaiola de esquilo

Para se obter este efeito em motores com o rotor curto circuitado, onde não se tem acesso aos enrolamentos do rotor, utiliza-se do efeito da variação da impedância com a frequência para aumentar a resistência na partida e diminuir em operação normal. A figura 15 mostra as linhas de fluxo produzidas por um barramento alojado no rotor de um motor de indução.

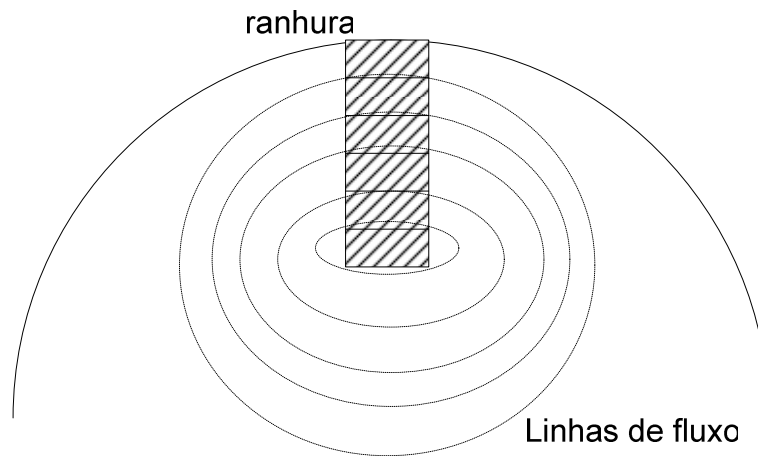


Figura 15: ranhura profunda

Dividindo-se a seção transversal do barramento em diversas camadas é fácil observar que a indutância das camadas mais profundas será maior que a indutância das camadas superiores.

Durante a partida ($n = 0$, $s = 1$), a frequência da corrente do rotor é igual a frequência da rede. O efeito da reatância na impedância total é grande. A corrente não se distribui de forma uniforme no condutor aumentando, assim, a sua resistência efetiva.

Em operação normal, em baixa frequência, o valor da reatância diminui fazendo com que a corrente se distribua de forma mais uniforme, aumentando a área efetiva do condutor e diminuindo o valor da resistência.

O desenho da ranhura do rotor pode fazer com que o valor da resistência fique três vezes superior na partida em relação ao seu valor em operação normal. Este comportamento produz um alto torque de partida e um bom rendimento em operação normal.

É possível obter o mesmo efeito usando dois condutores (ou, como é chamado, um barramento duplo) no rotor.

10) Classe dos Motores de Indução

As classes dos motores de indução trifásico são definidas pela NEMA (National Electrical Manufacturer Association) em função da característica de torque em função da velocidade do motor. Cada motor tem uma aplicação diferente.

Classe A: baixa resistência do rotor.
 Alto rendimento

$$0,5\% < s < 1,5\%$$

- Classe B: Características parecidas com a Classe A com menores correntes de partida.
Alta dispersão;
Bom rendimento.
- Classe C: Alto conjugado;
Baixa corrente de partida.
- Classe D: Altíssimo conjugado de partida
 $8\% < s < 15\%$;
Baixo rendimento;
Motores de partida intermitente.

11) Controle de velocidade

O motor de indução opera praticamente a velocidade constante.

É interessante notar que, na faixa normal de operação o seu comportamento é estável. Um aumento da carga provoca redução da velocidade e o conseqüente aumento do torque elétrico.

Grandes variações de carga provocam pequenas variações na velocidade devido à inclinação acentuada da característica ($T \times n$) na faixa normal de operação.

Alguns acionamentos exigem o controle da velocidade. Para estes acionamentos, antigamente, eram usados os motores de corrente contínua pela facilidade no controle. No entanto, o motor de indução é mais barato e exige menor manutenção. Os dispositivos de eletrônica de potência permitiram a criação de acionadores com frequência variável que permitem o controle da velocidade do MIT.

a) Mudança no número de pólos.

Como foi visto, a velocidade de rotação do campo magnético girante (n_s) é proporcional ao número de pólos (p).

$$n_s = \frac{120f}{p} \quad (67)$$

É possível ligar os enrolamentos do estator de forma a alterar o seu número de pólos.

Este esquema permite o controle de velocidade por degraus e é usado com o MIT gaiola já que não precisa fazer nada com o enrolamento do rotor.

b) Controle da tensão de entrada.

O torque é proporcional ao quadrado da tensão aplicada. Variar a tensão muda o ponto de operação do motor.

Exemplo 6

Usando os dados do exemplo anterior, traçar a característica torque versus velocidade para o motor de indução trifásico usando a tensão nominal, 70% da tensão nominal e 50% da tensão nominal.

Solução

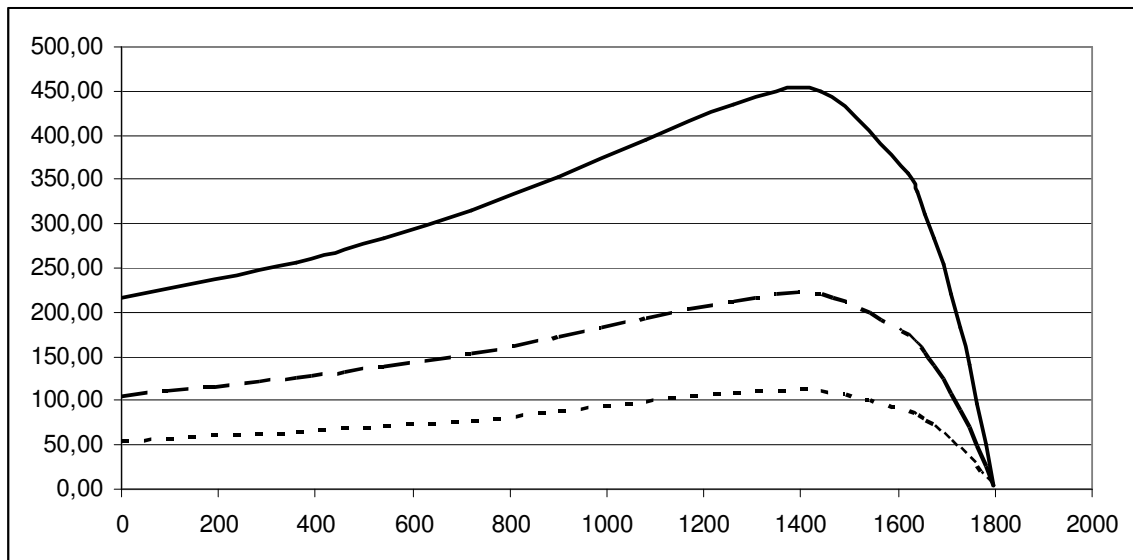


Figura 16: T x n variando a tensão de entrada.

Observe que para um torque mecânico constante de 50 Nm este motor terá três velocidades diferentes dependendo da tensão aplicada nos enrolamentos do estator.

A redução da velocidade implica em aumento do escorregamento e conseqüente redução da eficiência.

A faixa de variação da velocidade com este tipo de controle não é muito grande nem muito eficiente.

A tensão de entrada pode ser controlada por um autotransformador ou por um circuito tiristorizado de variação de tensão.

É possível observar também da figura 20 que a redução tensão de entrada reduz o torque de partida podendo fazer com que o motor não funcione.

c) Controle da frequência

A velocidade do campo magnético girante é definida pela frequência da corrente trifásica aplicada no motor. A velocidade do motor depende da velocidade do campo girante. Controlar a frequência da corrente aplicada, portanto, é uma forma de controlar a velocidade.

Existem diversos equipamentos que permitem o controle da frequência. Esquemáticamente, tem-se:

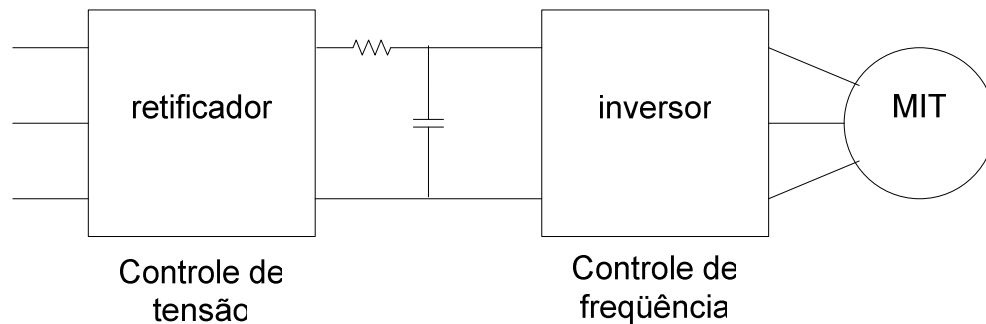


Figura 17: Controle de velocidade através da frequência.

Normalmente, o controle de frequência é feito em conjunto com o controle de tensão. A tensão interna da máquina, por fase (E_1), já foi calculada:

$$E_1 = 4,44 f N \phi K_{w1} \quad (68)$$

A tensão interna difere da tensão aplicada da queda de tensão resistiva e da queda de tensão na reatância de dispersão. Desprezando esta queda, tem-se $V_1 \approx E_1$. Com estas considerações:

$$\phi = k \frac{V_1}{f} \quad (69)$$

O fluxo é proporcional à relação entre tensão e frequência. Não é possível reduzir a frequência mantendo a tensão constante porque a máquina satura. Este tipo de controle é chamado “V/f” constante.

Para menores frequências a tensão é reduzida para manter o fluxo e o conjugado constantes.

Para frequências maiores a tensão não pode aumentar e há uma redução do fluxo e do torque no motor.

Este tipo de controle permite uma grande variação da velocidade para uma mesma carga mecânica. Além disto, como a operação ocorre para baixos valores de escorregamento, é alta a eficiência do motor.

d) Controle através de resistência no rotor.

Já foi visto que a característica ($T \times n$) varia com a inclusão de resistências externas trifásicas ao circuito do rotor (Figura 11). Para um conjugado mecânico constante a inclusão da resistência externa muda a velocidade de rotação do motor.

Observe que a redução da velocidade provoca aumento do escorregamento e a redução da eficiência do motor.

Existem formas mais sofisticadas de inclusão de resistências externas para facilitar o controle do motor. Na figura 18 é mostrado um retificador trifásico que alimenta um resistor em paralelo com um IGBT. Este dispositivo de eletrônica de potência pode ser aberto e fechado através de um comando externo. Dependendo do controle do dispositivo o valor efetivo da resistência varia proporcionando o controle da velocidade.

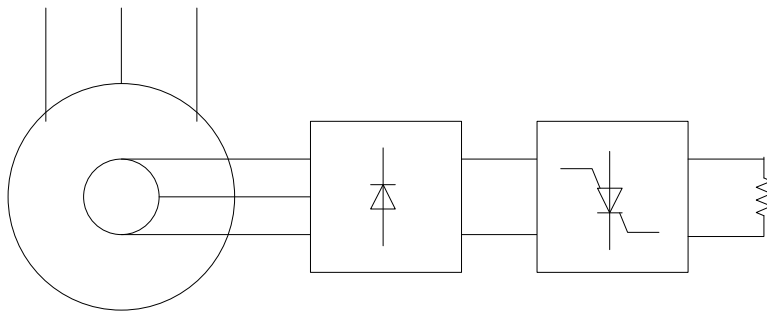


Figura 18: controle de velocidade com resistor no circuito do rotor

12) Partida do Motor de Indução

Durante a partida ($n = 0$) o escorregamento é igual à unidade e a impedância vista pela tensão aplicada é pequena. Desta forma, a corrente de partida pode chegar a valores elevados (até dez vezes a corrente nominal).

Grandes correntes de partida são sempre um problema. Se a partida for lenta pode danificar o motor. Se a alimentação do motor for feita através de um longo alimentador, a queda de tensão pode prejudicar o funcionamento do motor e de outros equipamentos ligados próximo ao motor.

A redução da corrente de partida é obtida, normalmente, através da redução da tensão de entrada. Existem várias formas de se reduzir a tensão aplicada. Como o torque de partida

é proporcional ao quadrado da tensão (como mostra a figura 16), é preciso atenção para que a redução da tensão não provoque o travamento do rotor.

Um dos métodos de redução é alimentar o motor com um autotransformador controlado. Quando o motor se aproxima da velocidade nominal o autotransformador é retirado através de um chaveamento. A figura 19 mostra o esquema.

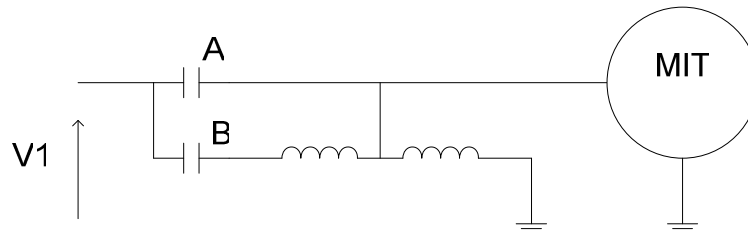


Figura 19: Partida com autotransformador, por fase.

Durante a partida “A” é aberto e “B” fechado. Em operação normal, “A” é fechado e “B” aberto.

Outra forma comum de se acionar um MIT durante a partida é através da ligação Y Δ . Na partida a tensão aplicada no enrolamento do estator é a tensão fase neutro (conexão Y ou estrela). Durante a operação normal aplica-se a tensão de linha nos enrolamentos do estator. A redução no torque de partida é de 1/3. O esquema é mostrado na Figura 20.

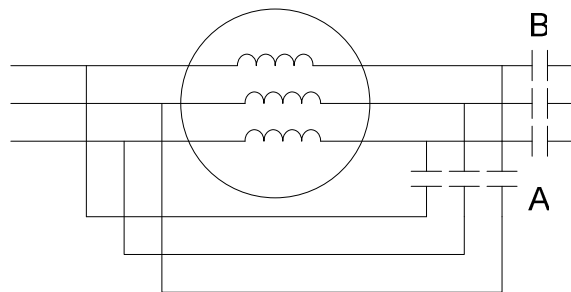


Figura 20: partida Y Δ .

Durante a partida, “A” é aberto, “B” fechado. Em operação normal, “A” fechado, “B” aberto.

Finalmente, é possível alimentar o motor com uma fonte chaveada controlada como mostrado na figura 17. Além do controle da partida, a fonte faz também o controle da velocidade.

13) Referências Bibliográficas

[1] SEN, P.C. “Principles of Electric Machines and Power Electronics”, New York, John Wiley and Sons, 1996.

[2] MATSCH, L. W., MORGAN, J. D., "Electromagnetic and Electromechanical Machines", Harper and Row, NY, 1986.

[3] FITZGERALD, A. E., KINSLEY, C., KUSKO, A., "Máquinas Elétrica", McGraw Hill, São Paulo, 1979.

[4] DEL TORO, V., "Fundamentos de Máquinas Elétricas", Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1994.

[5] NASAR, S. A., "Electric Machines and Transformers", Macmillan, NY, 1984.

[6] NASAR, S. A., "Máquinas Elétricas", Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1984.

[7] SLEMON, G. R., "Equipamentos Magnetelétricos", Livros Técnicos e Científicos, São Paulo, 1974.

1) Introdução

A máquina síncrona elementar é composta por três enrolamentos no estator, defasados de 120 graus e um enrolamento no rotor alimentado em corrente contínua.

O rotor da máquina síncrona (MS) pode ser liso ou com pólos salientes. A máquina de rotor liso é usada para acionamentos em alta velocidade ($n = 1800 \text{ rpm}$ ou 3600 rpm) e a de pólos salientes para acionamentos em baixa velocidade.

A figura 1 mostra esquematicamente a MS elementar com a representação dos seus quatro enrolamentos: três fases no estator e o enrolamento de campo no rotor.

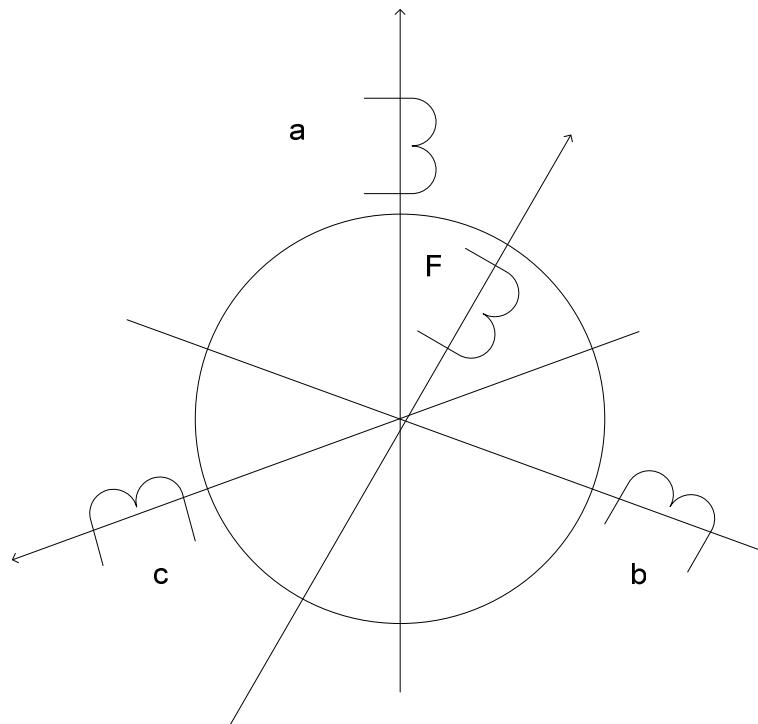


Figura 1: Máquina síncrona elementar.

A MS é usada, normalmente, como gerador. Praticamente toda a potência elétrica gerada no mundo é feita através de geradores síncronos.

Uma das facilidades desta máquina, como será visto adiante, é poder operar em regime permanente como um controle de potência ativa e reativa do sistema. Controlar a potência reativa é interessante para ajustar o fator de potência de uma carga.

Exemplo 1

Em uma indústria, um motor síncrono, trifásico, de 4.400 V, 500 kVA, é instalado em paralelo com vários motores de indução. Os dados dos motores em operação são os seguintes:

MIT: 600 kVA, $\text{fp} = 0,8$ (indutivo)

MS: 400 kVA, $\text{fp} = 1$

- a) Qual o fator de potência (fp) da indústria?
- b) Como melhorar o fp desta indústria?

Solução

$$P(\text{MIT}) = 600 \cdot 0,8 = 480 \text{ kW}$$

$$P(\text{MS}) = 400 \text{ kW}$$

$$P(\text{total}) = 880 \text{ kW}$$

$$Q(\text{MIT}) = 600 \cdot 0,6 = 360 \text{ kvar} = Q(\text{total})$$

$$S(\text{total}) = (880^2 + 360^2)^{1/2} = 950 \text{ kVA}$$

$$\text{fp} = 880/950 = 0,92 \text{ (indutivo)}$$

Para melhorar o fp pode-se usar o motor síncrono até o limite da sua potência aparente máxima (ou nominal).

$$S(\text{MS}) = 500 \text{ kVA}$$

$$P(\text{MS}) = 400 \text{ kW}$$

$$Q(\text{MS}) = 300 \text{ kvar}$$

Acrescentando 300 kvar de potência reativa na carga, tem-se:

$$Q(\text{total}) = 360 - 300 = 60 \text{ kvar}$$

A potência aparente da carga passa a ser:

$$S(\text{total}) = (880^2 + 60^2)^{1/2} = 882 \text{ kVA}$$

$$\text{fp} = 0,997$$

Melhorar o fator de potência da carga é sempre bom. Reduzindo a corrente total, reduz de forma significativa as perdas que variam com o quadrado desta corrente.

2) Gerador Síncrono

Aplicando-se uma corrente contínua no enrolamento de campo (i_F), e acionando-se mecanicamente o rotor a uma velocidade ω , o fluxo nas três bobinas do estator vai

variar senoidalmente com o tempo produzindo um sistema trifásico de tensões equilibradas.

O valor rms da tensão nas três fases é igual e, normalmente, a tensão do estator em vazio é chamada de “tensão interna” ou “tensão de excitação” (E).

O cálculo de E é simples e foi feito no caso do motor de indução trifásico. A expressão é dada por:

$$E = 4,44 f \phi_F N k_w \quad (1)$$

Onde

ϕ_F é o fluxo produzido pela corrente de campo;

N é o número de espiras do enrolamento do estator;

k_w é o coeficiente de distribuição dos enrolamentos do estator;

f a frequência da variação do fluxo que é proporcional à velocidade de rotação do rotor ω .

A frequência de variação do fluxo em uma bobina do rotor depende do número de pólos da máquina.

Considere a bobina da fase “a” desenhada esquematicamente no “eixo a” da figura 2. Quando o rotor dá uma volta completa em seu eixo, o fluxo na bobina completa dois ciclos.

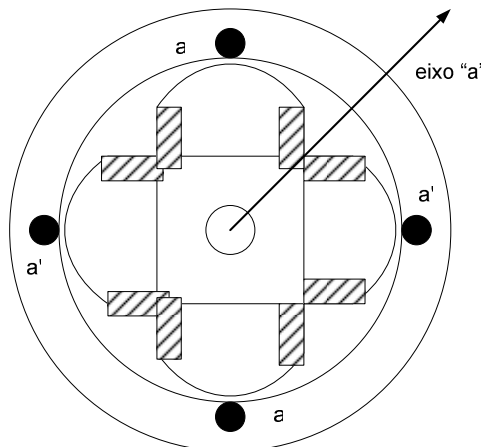


Figura 2: Máquina síncrona de 4 pólos

A frequência angular da tensão induzida (ω_e) será duas vezes a velocidade de rotação mecânica do rotor (ω_m). Então, para uma máquina de “p” pólos:

$$\omega_e = \frac{p}{2} \omega_m \quad (2)$$

Como,

$$\omega_e = 2\pi f \quad (3)$$

e

$$\omega_m = \frac{2\pi n}{60} \quad (4)$$

Então:

$$n = \frac{120f}{p} \quad (5)$$

Para permitir a conexão de geradores em paralelo, a tensão gerada por uma máquina síncrona é essencialmente a frequência constante. A operação deve ser feita, portanto, a velocidade constante.

A velocidade de rotação dos geradores é determinada pelo acionamento mecânico. Para motores de alta velocidade, usa-se geradores de pólos lisos com 2 ou 4 pólos. Para turbinas que têm o seu máximo rendimento em baixas velocidades, usa-se geradores de pólos salientes com algumas dezenas de pólos.

Como a tensão interna (E) é função da frequência e do fluxo e a frequência é constante. O controle de tensão de uma máquina síncrona é feito através do controle do fluxo produzido pela corrente do campo.

Para se obter o valor da tensão rms do estator em função da corrente de campo, basta efetuar o ensaio em vazio do gerador. Aciona-se mecanicamente o gerador à velocidade síncrona e varia-se a corrente de campo de zero ao seu valor máximo. Esta característica é chamada “Característica de Circuito Aberto (CCA)” do gerador. A figura 3 mostra a CCA de uma máquina.

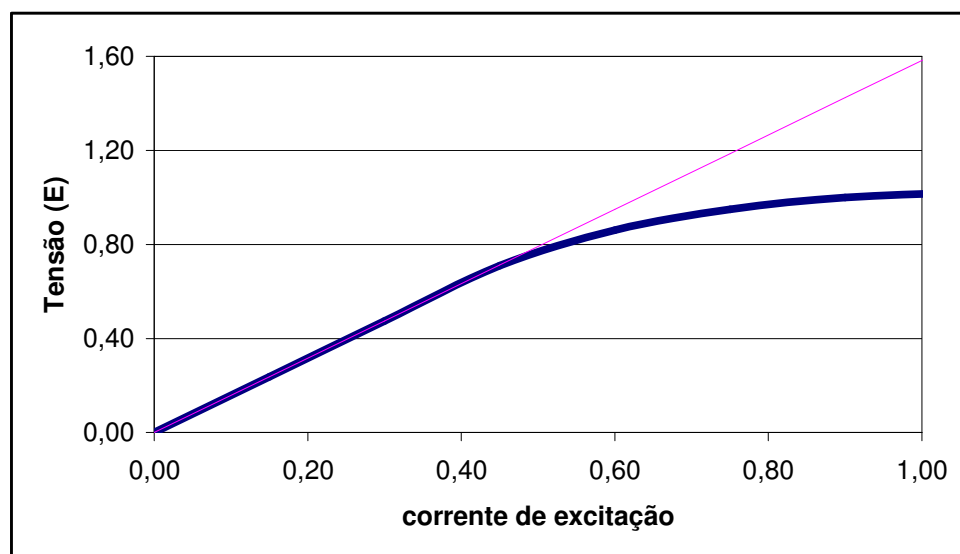


Figura 3: Característica de Circuito Aberto (CCA).

Quando i_F é igual a zero, a tensão induzida será dada pelo valor residual do fluxo. Com o aumento da corrente de excitação, o fluxo aumenta linearmente. A partir do momento que o circuito magnético da máquina satura, o aumento em i_F não provoca aumento no fluxo e por consequência o valor da tensão induzida também satura. A parte linear da CCA é chamada de “linha de entreferro”.

Existe uma defasagem de 90° entre o fluxo e a tensão gerada. De fato, como a Lei de Faraday diz que a tensão é igual à variação do fluxo concatenado com o tempo, quando o fluxo é máximo, sua variação é mínima. Se representarmos o fluxo por uma função cosenoidal do tempo, a tensão será dada por uma função senoidal.

Representando esquematicamente a tensão gerada (E) e o fluxo (ϕ), ou a força magnetomotriz (F), obtém-se o diagrama fasorial da figura 4.

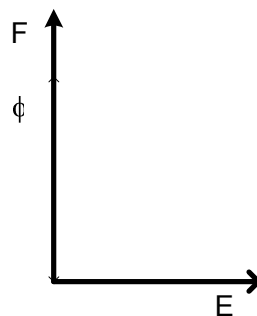


Figura 4: Diagrama fasorial da máquina em vazio.

Se a máquina for ligada a uma carga trifásica, as tensões vão provocar a circulação de correntes trifásicas nas bobinas do estator. O efeito da circulação de correntes no estator é chamado de Reação da Armadura (RA).

A reação da armadura produz uma força magnetomotriz que gira no entreferro da máquina na velocidade da tensão induzida. A fase da corrente depende da carga. Suponha que a corrente da fase “a” esteja defasada da tensão interna (E) de um ângulo de α radianos. A reação da armadura pode ser acrescentada ao diagrama fasorial anterior dando origem à figura 5.

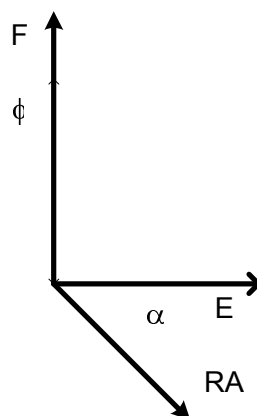


Figura 5: Reação da Armadura (RA)

Antes de desenvolver o circuito equivalente da máquina síncrona é interessante observar que ela é uma máquina que opera em regime permanente com tensão terminal e velocidade constantes.

De fato, as diversas máquinas de um sistema são conectadas em paralelo. Todas elas são ligadas, através de transformadores trifásicos, ao sistema de transmissão. O sistema de transmissão faz a conexão às cargas. Normalmente, considera-se que a máquina esteja ligada a um sistema muito grande onde tensão e frequência permanecem constantes independentemente do que ocorre na máquina. Este sistema é chamado de “barramento infinito”. A figura 6 mostra, esquematicamente, as máquinas ligadas a um barramento infinito.

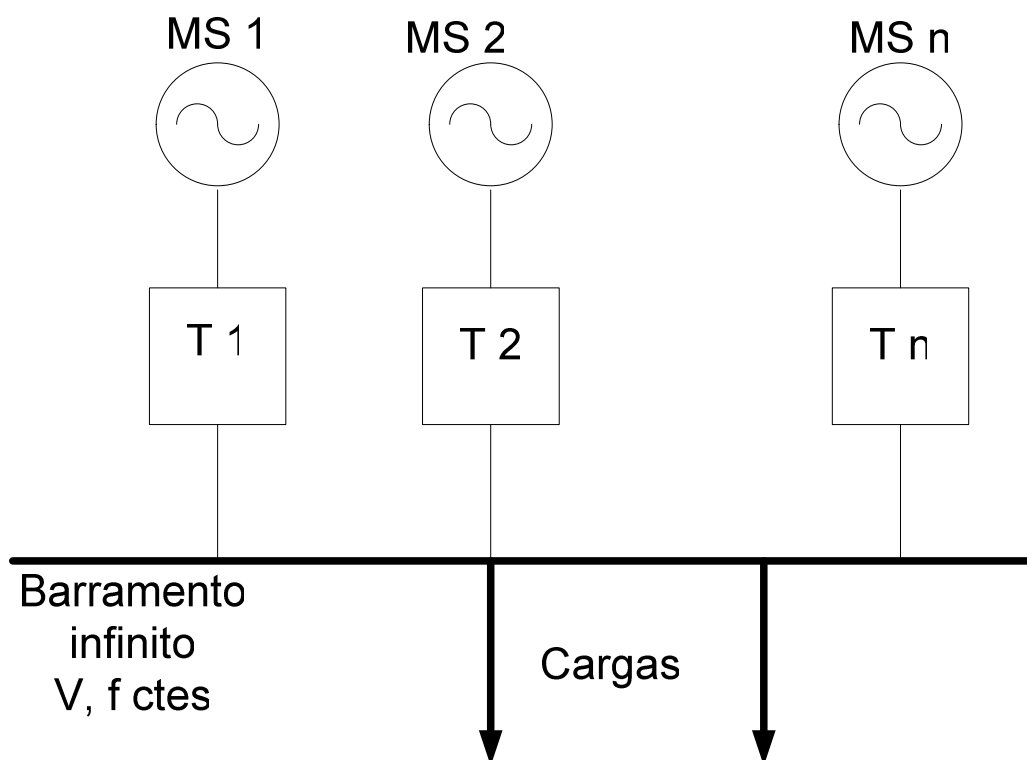


Figura 6: Máquinas ligadas a um barramento infinito

Para se conectar um novo gerador à rede (ou a um barramento infinito) é preciso, inicialmente, sincronizar o novo gerador.

Para sincronizar o gerador, são necessários alguns ajustes:

- a) tensão terminal
- b) frequência
- c) sequência de fase
- d) fase

Usa-se um aparelho, chamado “sincroscópio”, para ajustar a tensão terminal à tensão da rede. É possível também fazer o ajuste através de um conjunto de três lâmpadas.

A figura 7 mostra o modelo esquemático da conexão das lâmpadas em paralelo com um disjuntor (D). Quando as lâmpadas estiverem apagadas o disjuntor pode ser ligado e a máquina conectada à rede.

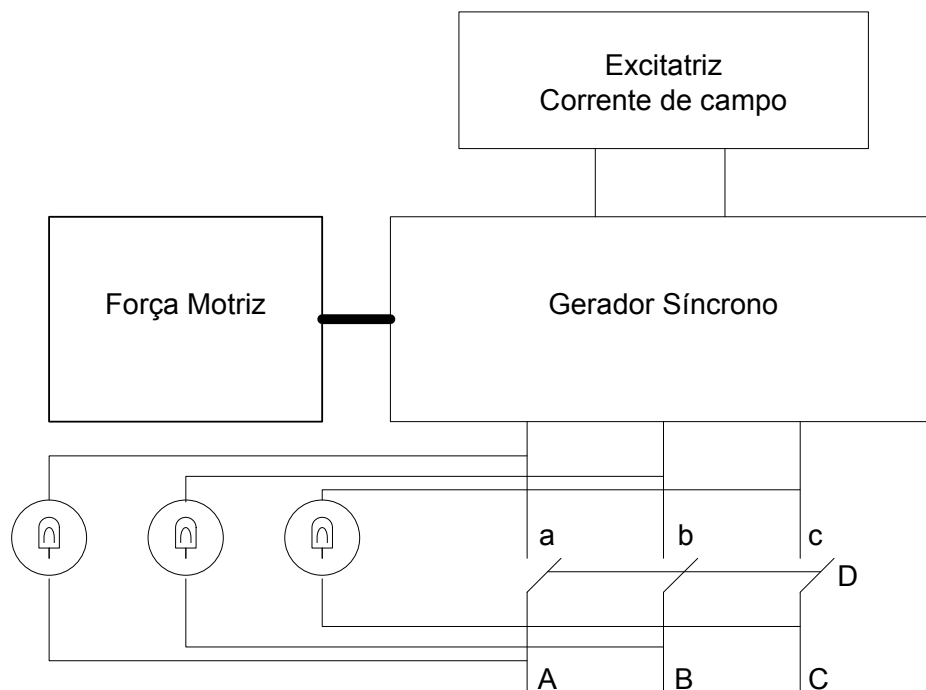


Figura 7: Conexão de um gerador síncrono à rede

Se a tensão terminal for diferente da tensão da rede, as lâmpadas estarão acessas e deve ser feito um ajuste na corrente de campo.

Se a frequência for diferente, a luminosidade das lâmpadas varia com o tempo. É preciso ajustar a velocidade da fonte mecânica de energia.

Se houver uma troca de fase, as lâmpadas permanecem acesa e é preciso alterar a conexão das fases.

Finalmente, a defasagem das tensões trifásicas pode ser corrigida através da variação da velocidade da fonte mecânica.

3) Motor Síncrono

O motor síncrono, por exigir uma fonte de corrente contínua, é mais caro que o motor de indução trifásico (MIT).

Alguns acionamentos que exigem velocidade constante podem ser feitos através deste tipo de motor.

O motor síncrono não tem torque de partida. Quando o estator é conectado a uma fonte trifásica de tensão alternada, as correntes do estator produzem um campo magnético girante (idêntico ao do MIT) que roda a uma velocidade muito elevada. O rotor tenta

acompanhar o campo mas não consegue devido a inércia mecânica. O que se observa é a vibração do rotor.

Para partir um motor síncrono pode-se usar uma fonte de frequência variável o que é caro e pouco usual. O procedimento mais normal é acionar o motor síncrono como se ele fosse um motor de indução.

Para isto, o enrolamento de campo é deixado em aberto e são colocados barramentos extras no pólo do rotor para que funcionem como uma “gaiola de esquilo”. Esses enrolamentos são chamados de “enrolamentos amortecedores”.

Os enrolamentos amortecedores funcionam com os enrolamentos do rotor de um MIT. Desta forma, o motor síncrono parte e, quando a velocidade se aproximar da velocidade síncrona o enrolamento de campo é acionado. Neste momento a máquina passa a funcionar como motor síncrono.

Os enrolamentos amortecedores não têm nenhum efeito na máquina quando ela opera na velocidade síncrona. A tensão induzida e as correntes são nulas. No entanto, quando há uma alteração na velocidade de rotação da máquina, correntes são induzidas nestes enrolamentos no sentido de produzir um torque que se oponha à variação da velocidade. Por este motivo são chamados “enrolamentos amortecedores”.

4) Circuito Equivalente em Regime Permanente

A tensão induzida nos enrolamentos do estator (E_r) de um gerador síncrono será proporcional ao fluxo resultante no entreferro. Como foi visto, no caso das máquinas síncronas de pólos lisos, força magnetomotriz (fmm) e fluxo estão relacionados pela relutância, constante, do entreferro. Assim, o fluxo (ou a fmm) resultante será composto pelo fluxo produzido pelo campo (F) e pelo fluxo de reação da armadura (RA).

$$E_r = E_{RA} + E_F \quad (6)$$

A tensão de reação da armadura (E_{RA}) pode ser representada por uma reatância de magnetização (X_{mag}). Observando o diagrama fasorial da máquina, considerando que a tensão está atrasada de 90° em relação ao fluxo e que a corrente na fase está atrasada 90° em relação à tensão, tem-se:

$$-\bar{E}_{RA} = jX_{mag} \bar{I}_a \quad (7)$$

Então:

$$\bar{E}_F = jX_{mag} \bar{I}_a + \bar{E}_r \quad (8)$$

A tensão induzida no estator (E_r) é diferente da tensão terminal (V). Da mesma forma que no transformador e no MIT, tem-se a resistência do enrolamento e a parte do fluxo de dispersão. Considerando a máquina operando como gerador, ou seja, com corrente positiva saindo da geração e indo para carga tem-se:

$$\bar{V} = \bar{E}_r - R\bar{I}_a - jX\bar{I}_a \quad (9)$$

Portanto, é possível determinar a tensão interna da máquina (E_F) conhecendo-se as condições de carga da máquina, ou seja, a tensão terminal e a corrente (ambas em módulo e ângulo).

$$\bar{E}_F = jX_{mag}\bar{I}_a + jX\bar{I}_a + R\bar{I}_a + \bar{V} \quad (10)$$

A reatância síncrona da máquina (X_S), por definição, é a soma da reatância de magnetização e a de dispersão.

$$X_S = X_{mag} + X \quad (11)$$

Então:

$$\bar{E}_F = \bar{V} + jX_S\bar{I}_a + R\bar{I}_a \quad (12)$$

E o circuito equivalente é dado pela figura 8.

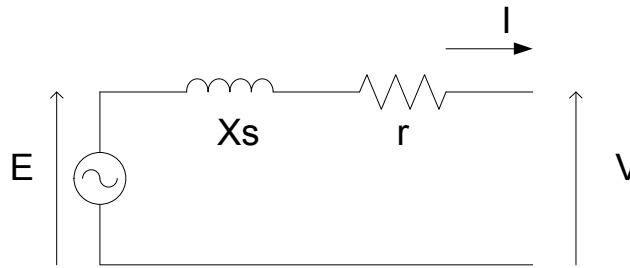


Figura 8: Circuito Equivalente da Máquina Síncrona de Pólos Lisos

Para se obter os parâmetros do circuito equivalente, mede-se a resistência, por fase, e se faz os dois ensaios: em circuito aberto (CA) e em curto-circuito (CC).

O primeiro ensaio já foi descrito na definição da curva de magnetização da máquina, ou seja, na característica de circuito aberto (CCA).

O ensaio em CC é feito medindo-se a corrente (média entre as três fases) nos terminais do gerador em curto circuito, fazendo variar a corrente de excitação.

Quando os terminais da máquina estão em CC a corrente de fase estará praticamente 90° atrasada em relação à tensão interna (E_F). A fmm resultante será pequena e a máquina não satura. Desta forma, a característica de curto circuito (CCC) de um gerador síncrono é linear. O diagrama fasorial da máquina durante o ensaio em curto é mostrado na figura 9 e as curvas CCA e CCC são mostradas simultaneamente na figura 10.

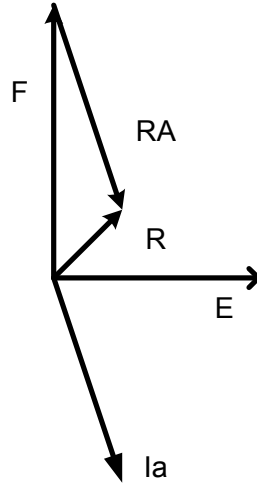


Figura 9: Diagrama fasorial da máquina síncrona em curto circuito.

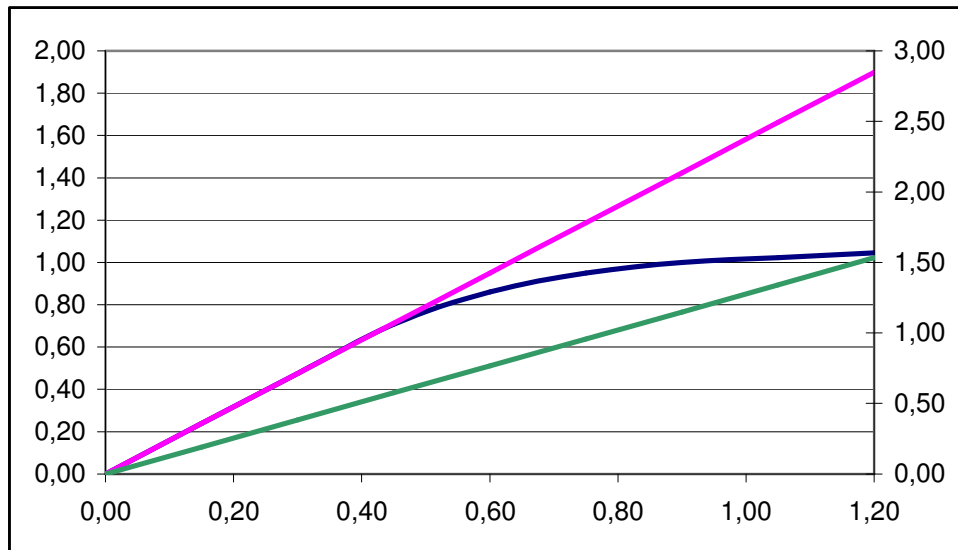


Figura 10: CCC e CCA da máquina síncrona.

a) Reatância síncrona não-saturada

A partir dos dados dos ensaios, é fácil obter o valor da impedância interna da máquina. De fato, a impedância será a relação entre a tensão e a corrente obtidas para um mesmo valor de corrente de excitação (i_F).

No caso da impedância síncrona não-saturada (Z_{NS}) esta relação é obtida na parte linear da curva de magnetização. Portanto:

$$Z_{NS} = \frac{V_{NS}}{I_a} \quad (13)$$

Conhecendo-se o valor da resistência por fase:

$$X_{NS} = \sqrt{Z_{NS}^2 - R^2} \quad (14)$$

b) Reatância síncrona saturada (X_s)

Normalmente os geradores síncronos operam com algum grau de saturação e conectados a um barramento de tensão constante. O nível de saturação da máquina não se altera significativamente com a variação da corrente de campo uma vez que:

$$E_r \cong V = cte \quad (15)$$

Desta forma, é interessante calcular a reatância saturada da máquina que é dada pela relação entre a tensão nominal (V_n) obtida no ensaio em circuito aberto e a corrente obtida na CCC para a mesma corrente de excitação.

$$Z_s = \frac{V_n}{I_a} \quad (16)$$

$$X_s = \sqrt{Z_s^2 - R^2} \quad (17)$$

Conhecido o circuito equivalente da máquina síncrona e os parâmetros que o compõe, é possível traçar o diagrama fasorial para operação da máquina como gerador ou como motor.

Considerando a tensão terminal (V) como referência, um gerador alimentando uma carga definida por uma corrente I_a apresenta o diagrama fasorial mostrado na figura 11.

$$\bar{E}_F = \bar{V} + jX_s \bar{I}_a + R \bar{I}_a \quad (18)$$

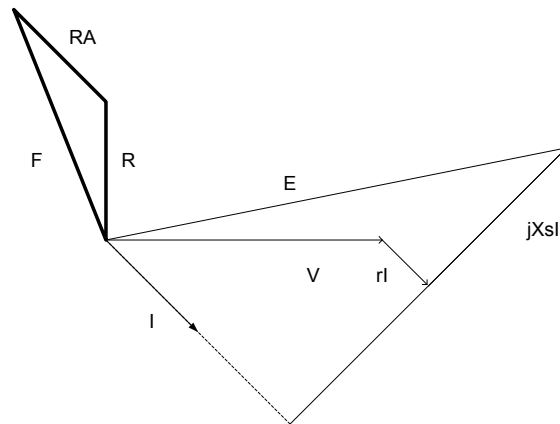


Figura 11: Diagrama fasorial do gerador alimentando uma carga indutiva.

Ainda considerando a tensão terminal como referência, a operação como motor pode ser caracterizada pela inversão do sentido positivo da corrente de armadura (figura 12).

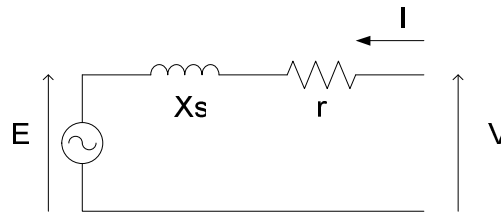


Figura 12: Circuito Equivalente do Motor Síncrono

Então:

$$\bar{E}_F = \bar{V} - jX_s \bar{I}_a - R \bar{I}_a \quad (19)$$

E o diagrama fasorial é apresentado na figura 12.

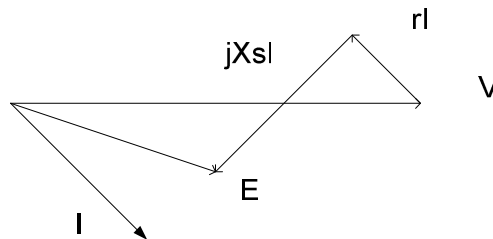


Figura 12: Diagrama fasorial do motor absorvendo uma corrente atrasada em relação à tensão.

Observe que o funcionamento como gerador é caracterizado por uma defasagem entre tensão interna (E_F) e tensão terminal (V) positiva. Quando a máquina opera como motor esta defasagem é negativa. Este ângulo é chamado ângulo de carga e é normalmente notado pela letra grega “ δ ”.

Exemplo 2

Dado a CCC e a CCA de um gerador síncrono trifásico de 200 MVA, 15,8 kV, 60 Hz. Calcular a reatância não-saturada e saturada da máquina em ohms e em pu.

iF (A)	0	150	300	450	600	750	900	1050	1200
CCA (kV)	0	3,75	7,5	11,2	13,6	15	15,8	16,15	16,5
CCC (kA)	0	1,4	2,8	4,2	5,6	7	8,4	9,8	11,2

Solução

É interessante transformar os valores em “pu”.

$$S_B = 200 \text{ MVA (trifásico)}$$

$$V_B = 15,8 \text{ kV (linha)}$$

$$I_B = \frac{S_B}{\sqrt{3}V_B} = 7,308 \text{ kA}$$

$$V_{BF} = \frac{V_B}{\sqrt{3}} = 9,122 \text{ kV (fase)}$$

$$Z_B = \frac{V_{BF}}{I_B} = 1,247 \text{ } \Omega$$

Como não foi dado o valor da resistência por fase, assume-se que $Z \cong X$. Então:

Para a corrente de campo vai-se assumir que a corrente que produz a tensão nominal em vazio é a corrente nominal, neste caso, 900 A. Então a tabela pode ser reescrita como:

iF (pu)	0,00	0,17	0,33	0,50	0,67	0,83	1,00	1,17	1,33
CCA (pu)	0,00	0,24	0,47	0,71	0,86	0,95	1,00	1,02	1,04
CCC (pu)	0,00	0,19	0,38	0,57	0,77	0,96	1,15	1,34	1,53

Como a CCC é linear, basta um único ponto para definir a reta que passa pela origem. O gráfico (em pu) está mostrado na figura 10.

Assim:

$$X(NS) = 1,546 \text{ ohms}$$

$$X(NS) = 1,239 \text{ pu}$$

$$X_S = 1,086 \text{ ohms}$$

$$X_S = 0,870 \text{ pu}$$

Exemplo 3

Qual a corrente de campo necessária para este gerador fornecer a sua potência nominal com fator de potência igual a 0,9 indutivo?

Solução

$$\bar{V} = 1 \angle 0 \text{ pu}$$

$$\bar{I} = 1 \angle -25,84 \text{ pu}$$

$$\bar{E} = V + jX_s \bar{I} = 1 + j0,87 \cdot 1 \angle -25,84 = 1,586 \angle 29,58 \text{ pu}$$

$$i_F = 900 \cdot 1,586 = 1427 \text{ A}$$

5) Característica de Potência (ou Torque)

Considerando que a máquina funcione, em regime permanente, com tensão e frequência constantes, a potência complexa (S) trifásica fornecida pela máquina será dada por:

$$S = 3 \cdot \bar{V} \cdot \bar{I}^* \quad (20)$$

Tomando o fasor de tensão terminal como referência, tem-se:

$$\bar{V} = V + j0 = V \angle 0 \quad (21)$$

A tensão de excitação pode ser colocada em forma polar ou retangular usando a definição do ângulo de carga “ δ ”.

$$\bar{E} = E \angle \delta = E(\cos \delta + j \sin \delta) \quad (22)$$

Desta forma o cálculo da corrente, usando a convenção “gerador”, é direto:

$$\bar{I} = \frac{\bar{E} - \bar{V}}{Z} = \frac{E \cos \delta - V + j E \sin \delta}{Z} \quad (23)$$

$$\bar{I}^* = \frac{E \cos \delta - V - j E \sin \delta}{Z^*} \quad (24)$$

Substituindo o valor da impedância conjugada (Z^*) e separando a parte real da parte imaginária, tem-se:

$$\bar{I}^* = \frac{R(E \cos \delta - V) + X_s(E \sin \delta)}{Z^2} + j \frac{X_s(E \cos \delta - V) - R(E \sin \delta)}{Z^2} \quad (25)$$

Voltando à equação (20), e lembrando que a parte real da potência complexa é chamada de potência ativa (P) e que a parte imaginária é chamada de potência reativa (Q), tem-se:

$$\begin{aligned} P &= 3 \frac{R(VE \cos \delta - V^2) + X_s(VE \sin \delta)}{Z^2} \\ Q &= 3 \frac{X_s(VE \cos \delta - V^2) - R(VE \sin \delta)}{Z^2} \end{aligned} \quad (26)$$

Fazendo a consideração usual de que a reatância é significativamente maior que a resistência obtém-se:

$$\begin{aligned} P &= 3 \frac{VE \sin \delta}{X_s} \\ Q &= 3 \frac{VE \cos \delta - V^2}{X_s} \end{aligned} \quad (27)$$

Estas duas expressões são muito importantes na análise da máquina síncrona em regime permanente.

A relação entre a potência ativa trifásica e o torque é a velocidade síncrona. Se a velocidade síncrona for tomada como velocidade de base em um sistema “pu”, o valor numérico da potência ativa trifásica e do torque em pu será o mesmo. Desta forma, considerando a máquina operando em regime permanente, a característica de torque ou de potência é a mesma.

É interessante notar (equação 27) que a potência varia senoidalmente com o ângulo de carga. A figura 13 mostra a característica $P \times \delta$ da máquina síncrona.

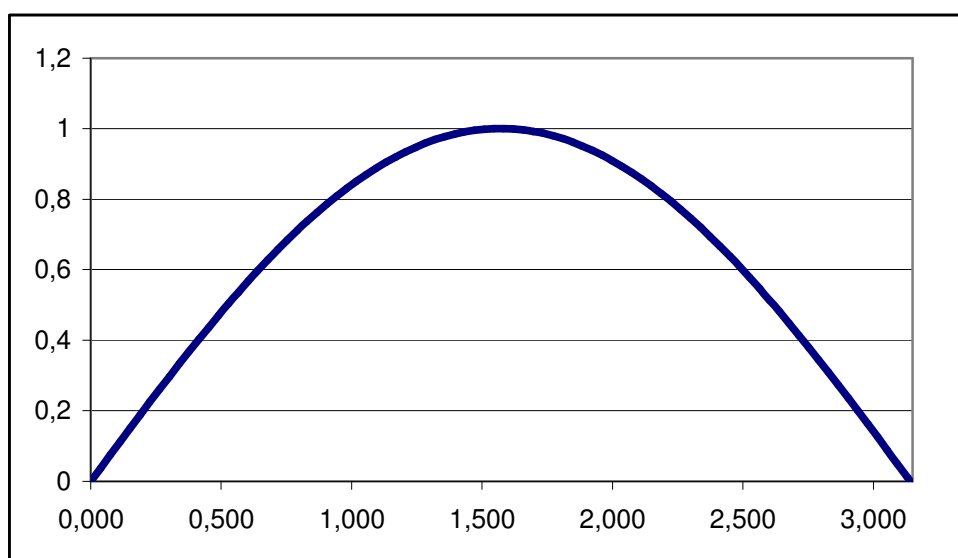


Figura 13: Característica P (pu) $\times \delta$ (rad) da máquina síncrona.

O valor da potência máxima varia com a tensão de excitação (E), portanto com a corrente de campo (i_F).

Mantendo a corrente de campo constante, se a potência mecânica de acionamento de um gerador for aumentada o novo ponto de operação do gerador será dado por um ângulo de carga maior, portanto com um maior fornecimento de potência ativa para a rede. O equilíbrio entre a potência mecânica de entrada e a potência elétrica de saída (de um gerador) deve ser mantido constantemente para que a velocidade permaneça constante.

Se a potência mecânica continuar aumentando lentamente (de forma a permitir uma análise em regime permanente) a potência elétrica continua aumentando até o ângulo de carga atingir o seu valor de máxima potência elétrica de saída ($\delta = \pi/2$). A partir deste ponto, o aumento da potência mecânica produz a redução da potência elétrica e a máquina perde a estabilidade. Este ponto é chamado de “limite de estabilidade estática da máquina”.

Exemplo 4

Um gerador síncrono trifásico de 5 kVA, 208 V, 4 pólos, 60 Hz, tem reatância síncrona igual a 8Ω . Qual a tensão de excitação se ele fornece a sua potência nominal com fator de potência igual a 0,8 indutivo?

Solução

Tomando como grandezas de base os valores nominais da máquina:

$$S_B = 5.000 \text{ VA}$$

$$V_B = 208 \text{ V}$$

$$I_B = 13,88 \text{ A}$$

$$Z_B = 8,65 \Omega$$

Portanto

$$\bar{V} = 1 \angle 0 \text{ pu}$$

$$\bar{I} = \left(\frac{S}{V}\right)^* = 1 \angle -36,87 \text{ pu}$$

$$X_s = \frac{8,0}{8,65} = 0,92 \text{ pu}$$

$$\bar{E} = \bar{V} + jX_s \bar{I} = 1 + j0,92 \cdot 1 \angle -36,87 = 1,7217 \angle 25,44 \text{ pu}$$

O módulo da tensão interna (de linha) será 358 volts.

Exemplo 5

Se a corrente de campo for aumentada em 20% sem nenhuma alteração na potência mecânica, qual será o fator de potência do novo ponto de funcionamento do gerador?

Solução

$P = 0,8 \text{ pu}$ (do exemplo anterior, que permanece constante).

$$E' = 1,2 E = 2,066 \text{ pu}$$

O ângulo de carga δ' vai se ajustar a nova condição.

Como em pu:

$$P = \frac{VE_{sen}\delta}{X_s}$$

$$\delta' = \arcsin \frac{PX_s}{E'V} = 20,87$$

Então:

$$\bar{I}' = \frac{E' \angle \delta' - \bar{V}}{jX_s} = 1,2895 \angle -51,6 \text{ pu}$$

O fator de potência do gerador, nesta nova condição de carga, será:

$$\text{fp} = \cos(-51,6) = 0,62 \text{ (indutivo)}$$

Exemplo 6

Se a potência mecânica for aumentando lentamente até o seu valor máximo (limite de estabilidade estática) sem alterar a corrente de campo, qual será a corrente do estator nesta nova condição operativa?

Solução

$$P_{\max} = \frac{VE_{sen}(\pi/2)}{X_s} = 1,8714 \text{ pu}$$

$$\bar{I}' = \frac{1,7217 \angle 90 - 1 \angle 0}{j0,92} = 2,164 \angle +30,15 \text{ pu}$$

$$I' = 30 \text{ A}$$

Exemplo 7

A máquina dos exemplos anteriores funciona agora como motor absorvendo 3 kW da rede com um ajuste da corrente de excitação de forma a manter o fator de potência unitário. Qual a excitação e a corrente do motor nesta situação?

Solução

$$P = 0,6 \text{ pu (motor)}$$

$$Q = 0 \text{ (fp = 1)}$$

$$\bar{I}' = \left(\frac{S}{V}\right) = 0,6 \angle 0 \text{ pu}$$

$$\bar{E} = \bar{V} - jX_s \bar{I}' = 1 + j0,92 \cdot 0,6 = 1,1422 \angle -28,89 \text{ pu}$$

O diagrama fasorial pode ser visto na figura do exemplo 7 onde se observa o ângulo de carga negativo.

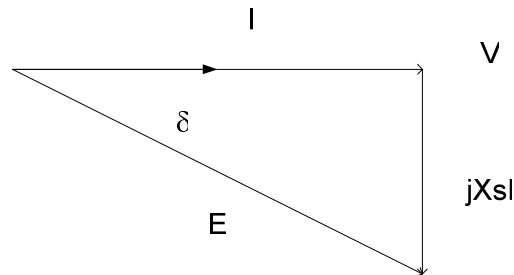


Figura do exemplo 7: diagrama fasorial

Exemplo 8

Qual o máximo torque do motor do exemplo anterior supondo que a corrente de excitação permaneça constante?

Solução

$$P_{\max} = \frac{VE \sin(\pi/2)}{X_s} = 1,2416 \text{ pu}$$

$$P_{\max} = 1,2416 \times 5 = 6,208 \text{ kW}$$

$$\omega_s = \frac{4\pi f}{p} = 188,5 \text{ rad/s}$$

$$T_{\max} = (P_{\max} / \omega_s) = 32,9 \text{ Nm}$$

É interessante observar que o diagrama fasorial da máquina fornece também o lugar geométrico da potência ativa e da potência reativa fornecida (ou absorvida) pela máquina. Como foi visto (equação 27):

$$P = \frac{VE \sin \delta}{X_s}$$

Supondo V e X_s constantes:

$$P \propto E \sin \delta \quad (28)$$

Da mesma forma:

$$Q = \frac{VE \cos \delta - V^2}{X_s} \propto E \cos \delta - V \quad (29)$$

Tomando a extremidade do fasor V como o zero de um par de ordenadas cartesianas, observa-se que a projeção vertical do fasor de excitação (E) é proporcional à potência ativa (P) da máquina. Já a projeção horizontal é proporcional à potência reativa (Q). A figura 14 mostra esta equivalência.

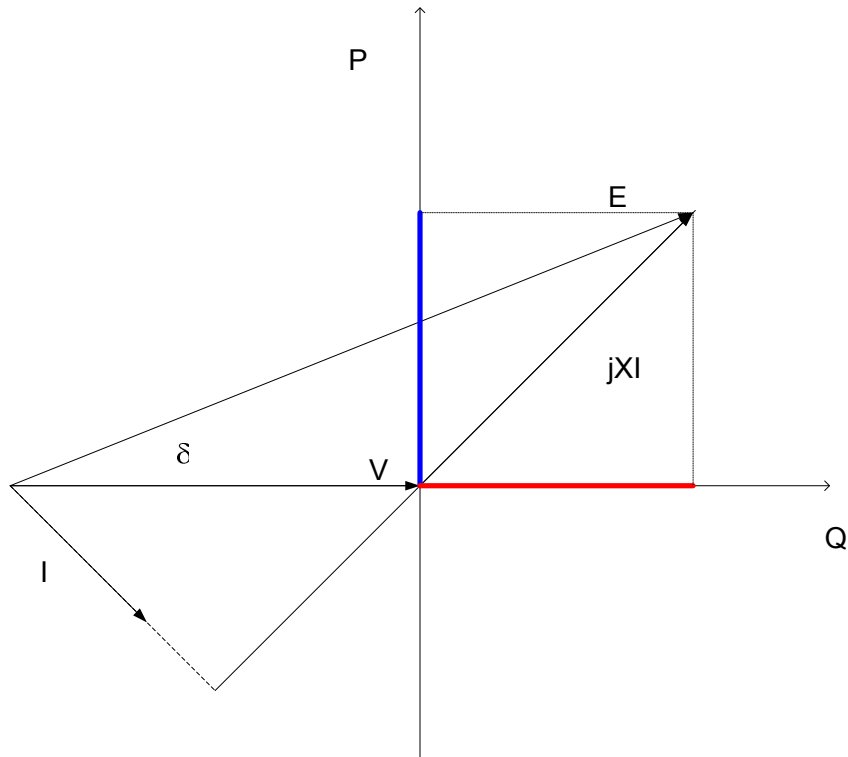


Figura 14: Potência ativa e reativa obtida do diagrama fasorial da máquina síncrona.

A operação da máquina com torque mecânico constante, ou seja, com potência ativa constante é obtida variando a corrente de excitação e, por consequência, o fator de potência da máquina.

Exemplo 9

Suponha que um gerador síncrono, trifásico, de pólos lisos, 4 pólos, 60 Hz, de 200 MVA, 13,8 kV, com reatância síncrona de 1 pu opere com a tensão terminal constante (igual ao seu valor nominal) fornecendo a sua potência aparente nominal com um fator de potência igual a 0,8 indutivo. Calcular a tensão de excitação nesta situação, com fator de potência unitário e com fator de potência igual a 0,8 capacitivo. O acionamento mecânico é mantido constante.

Solução

a) $\bar{V} = 1 \angle 0^\circ$ pu

$$\bar{I}(a) = \left(\frac{S}{V}\right)^* = 1 \angle -36,87^\circ \text{ pu}$$

$$X_s = 1,0 \text{ pu}$$

$$\bar{E}(a) = \bar{V} + jX_s \bar{I} = 1 + j1.1\angle -36,87 = 1,79\angle 26,56 \text{ pu}$$

Para avaliar se a tensão de excitação está correta, pode-se usar:

$$P = \frac{VE \sin \delta}{X_s} = 0,8 \text{ pu}$$

b) Com $\text{fp} = 1$, implica $P = S = 0,8 \text{ pu}$. Então:

$$\bar{I}(b) = \left(\frac{S}{V}\right)^* = 0,8\angle 0 \text{ pu}$$

$$\bar{E}(b) = \bar{V} + jX_s \bar{I} = 1 + j1.0,8\angle 0 = 1,28\angle 38,65 \text{ pu}$$

c) com $\text{fp} = 0,8$ capacitivo, implica $P = 0,8$ (permanece constante) e $S = 1 \text{ pu}$.

$$\bar{I}(c) = \left(\frac{S}{V}\right)^* = 1,0\angle +36,87 \text{ pu}$$

$$\bar{E}(c) = \bar{V} + jX_s \bar{I} = 1 + j1.1\angle +36,87 = 0,894\angle 63,43$$

d) O diagrama fasorial mostrando os três pontos de operação é mostrado na figura do exemplo 9.

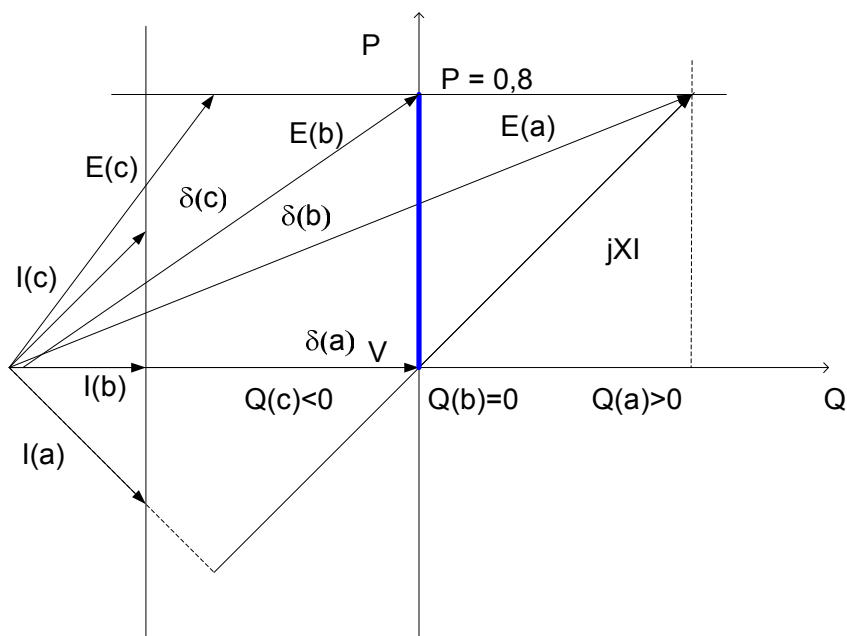


Figura do exemplo 9: Diagrama Fasorial.

É fácil observar que o módulo da corrente do estator passa por um mínimo quando o fator de potência é unitário. A variação do módulo da corrente de fase em função da corrente de excitação é chamada de curva em “V” da máquina síncrona.

Exemplo 10

Traçar a curva em “V” para três potências ativas diferentes (0, 0,4 e 0,8 pu) do motor do exemplo anterior.

Solução

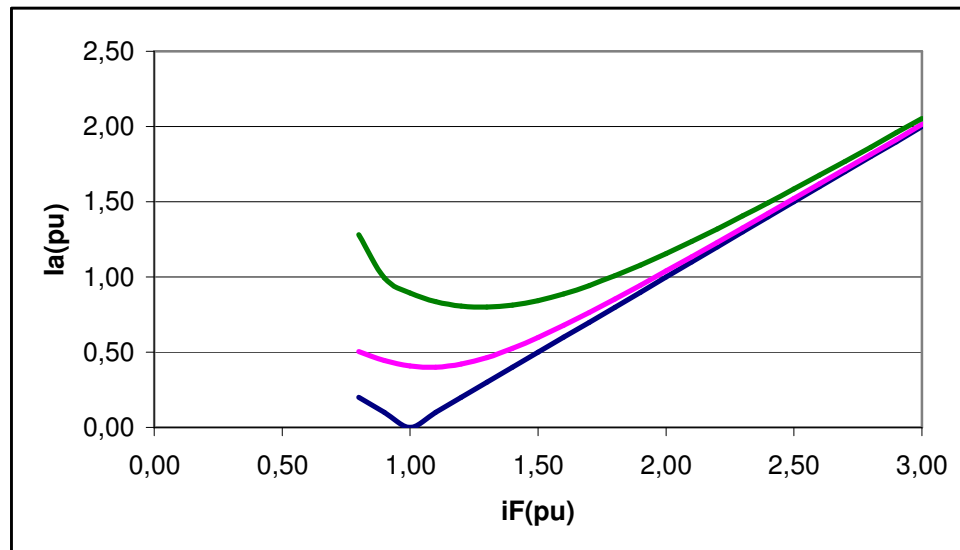


Figura do exemplo 10: Curva em “V” do motor síncrono

Observa-se que quando o gerador está “sobre-excitado” ele fornece potência ativa e reativa positivas. Ele funciona como se fosse um “capacitor” que fornece também potência ativa.

Quando o gerador está “subexcitado” ele continua fornecendo potência ativa positiva e absorvendo potência reativa (ou fornecendo potência reativa negativa). Ele se comporta como se fosse um indutor.

A mesma análise pode ser feita para a operação da máquina como motor. Quando o motor está “sobre-excitado” ele absorve potência ativa (ou gera potência ativa negativa) e fornece potência reativa. Quando ele está “subexcitado” ele continua absorvendo potência ativa e passa a absorver também potência reativa. A figura 15 mostra os quatro quadrantes de operação da máquina síncrona.

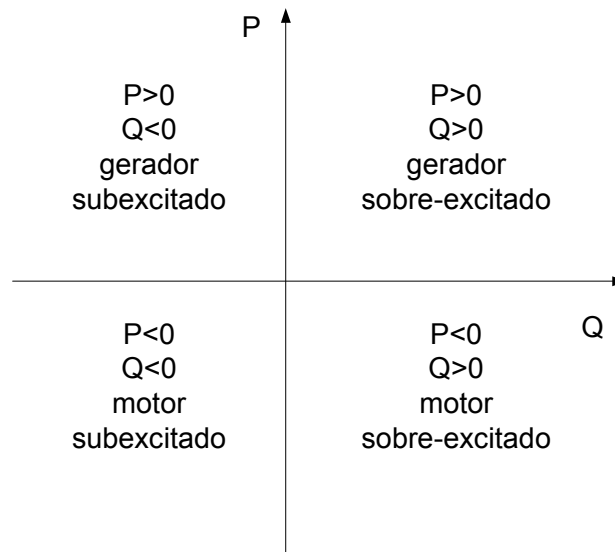


Figura 15: Possibilidades de funcionamento da máquina síncrona.

6) Curva de capacidade

Os limites de operação da máquina síncrona são definidos por três parâmetros:

- a) Corrente de armadura (I)
- b) Corrente de campo (i_F)
- c) Limite de estabilidade estática (δ).

O lugar geométrico da curva, centrada na extremidade do fasor de tensão terminal (V), com raio proporcional à corrente de armadura, define a capacidade máxima de condução de corrente pelos enrolamentos do estator.

Da mesma forma, como a corrente de excitação (E) é proporcional à corrente de campo, pode-se definir uma outra circunferência (de raio E_{\max} ou $i_{F\max}$) que seria centrada na origem do fasor de tensão (V).

Finalmente, sabendo-se que o fasor de tensão de excitação (E) não pode estar mais de 90° (adiantado ou atrasado) em relação ao fasor de referência (V), obtém-se o limite de estabilidade estática através de uma reta perpendicular à origem do fasor V . A figura 16 mostra esquematicamente a curva de capacidade da máquina síncrona de pólos lisos.

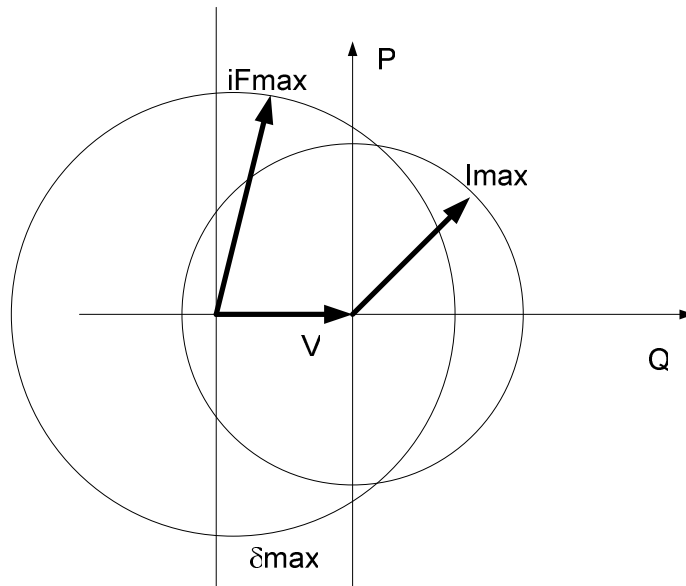


Figura 16: Curva de Capacidade da máquina síncrona de pólos lisos.

Exemplo 11

Traçar a curva de capacidade de um gerador síncrono trifásico, 5 MVA, 11 kV, 60 Hz, cuja reatância síncrona é de 25Ω . Sabe-se que a corrente do estator pode atingir até 10% acima da sua corrente nominal e que a tensão de excitação pode chegar a 2,5 vezes a tensão nominal em vazio.

Solução

$$S_B = 5 \text{ MVA}$$

$$V_B = 11 \text{ kV}$$

$$I_B = 262,4 \text{ A}$$

$$Z_B = 24,2 \Omega$$

$$X_s = \frac{25,0}{24,2} = 1,033 \text{ pu}$$

Portanto, se

$$\bar{V} = 1 \angle 0 \text{ pu}$$

$$XI_{max} = 1,1 \times 1,033 = 1,136 \text{ pu}$$

$$|\bar{E}_{max}| = i_{Fmax} = 2 \text{ pu}$$

A figura do exemplo 11 mostra a curva de capacidade para este exemplo.

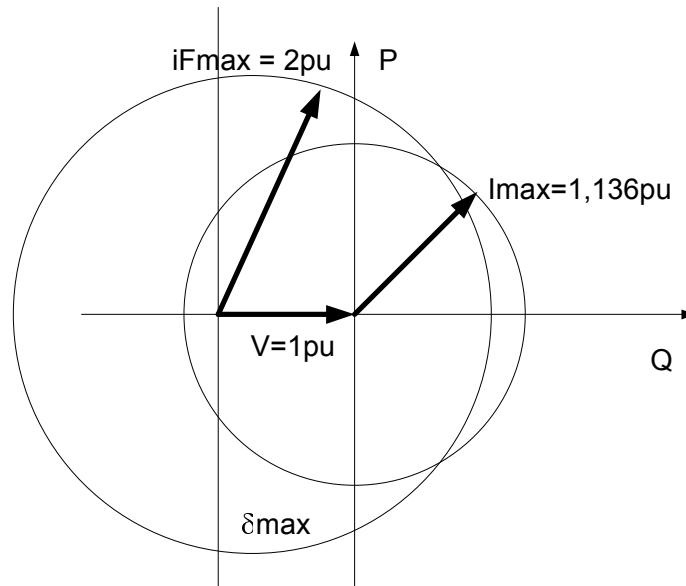


Figura do exemplo 11: Curva de capacidade

7) Máquinas Síncronas de pólos salientes

Como foi visto, as máquinas síncronas acionadas por turbinas hidráulicas são lentas e, normalmente, têm muitos pólos. Para se fazer um rotor de muitos pólos é mais conveniente, em termos construtivos, colocar os enrolamentos do rotor concentrados em pólos salientes.

Exemplo 12

O projeto da usina de Santo Antônio, no rio Madeira, prevê que a turbina terá um máximo rendimento a uma velocidade de 81,81 rpm. Quantos pólos terá o gerador associado?

Solução

$$n = \frac{120f}{p}$$

$$p = \frac{120f}{n} = 88 \text{ pólos}$$

A análise da máquina síncrona em regime permanente feita anteriormente levou em consideração que a relação entre fmm e fluxo, em qualquer parte do entreferro, era constante. Esta hipótese não é mais válida para as máquinas de pólos salientes uma vez que a relutância do entreferro não é constante.

A fase da reação da armadura (RA) depende da carga. Para cada carga, a relutância do caminho magnético será diferente. Em dois pontos limites a relutância pode ser calculada com facilidade.

Exemplo 13

Calcular a reação da armadura quando a corrente de carga estiver em fase com a tensão interna ($\alpha = 0$) e quando a corrente estiver atrasada de 90° em relação a esta mesma tensão ($\alpha = 90^\circ$)

Solução

No primeiro caso, a reação da armadura vai enxergar a relutância do caminho magnético em quadratura com o eixo da máquina uma vez que o fluxo produzido pelo rotor está a 90° em relação à tensão interna.

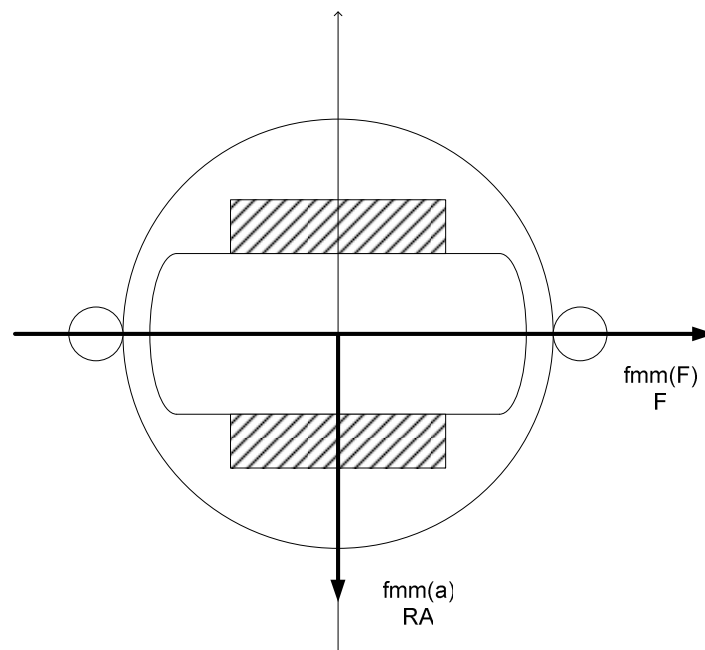


Figura do exemplo 13: Posição do rotor em quadratura em relação ao eixo da fase “a”.

A reatância proporcional ao caminho magnético nesta situação é chamada de reatância de eixo em quadratura X_q .

No outro caso, com a corrente atrasada 90° em relação à tensão interna, a relutância vista pela reação da armadura será aquela proporcional ao menor caminho de entreferro uma vez que a corrente estará em oposição de fase em relação ao eixo direto do rotor.

A reatância vista neste ponto é chamada reatância de eixo direto X_d .

Em qualquer situação é evidente que $X_d > X_q$.

No caso geral a corrente pode estar em qualquer posição em relação à tensão interna. Vai depender essencialmente da carga, ou seja, do ângulo de carga e do fator de potência.

Para levar em consideração o efeito da diferença de relutância, decompõe-se a reação da armadura (ou a corrente de carga, que lhe é proporcional), em duas componentes, uma

delas em fase com o eixo do rotor e uma outra em quadratura com este eixo. A componente de corrente em fase com o eixo do rotor é chamada corrente de eixo direto (I_d). A componente em quadratura é chamada de corrente de eixo em quadratura (I_q).

Com esta decomposição da corrente, o fluxo produzido pela reação da armadura também pode ser decomposto. Cada parcela do fluxo sendo proporcional à sua reatância de magnetização.

A decomposição do fasor de corrente I é feita em relação à tensão interna. Tomando-a como referência ($\delta = 0$) pode-se obter as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \bar{I}_d + \bar{I}_q \\ \bar{I}_d &= I_d \angle -90^\circ \\ \bar{I}_q &= I_q \angle 0^\circ \\ \bar{I} &= I_q - jI_d\end{aligned}\tag{30}$$

O fluxo resultante, da mesma forma que foi feito para a máquina de pólos lisos, será a soma fasorial do fluxo do campo com o fluxo de reação da armadura que, neste caso, terá duas componentes fasoriais defasadas de 90° .

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_{RAq} &= X_q \bar{I}_q \\ \bar{\lambda}_{RA d} &= X_d \bar{I}_d \\ \bar{\lambda}_{RA} &= X_q \bar{I}_q + X_d \bar{I}_d \\ \bar{\lambda}_R &= \bar{\lambda}_F + \bar{\lambda}_{RA}\end{aligned}\tag{31}$$

As tensões, proporcionais aos fluxos e atrasadas de 90° em relação a eles (ou com um fator $-j$ em relação aos mesmos) poderão ser escritas da seguinte forma, se for considerada também a queda de tensão resistiva:

$$\begin{aligned}\bar{V} &= \bar{E} - R\bar{I} - jX_q \bar{I}_q - jX_d \bar{I}_d \\ \bar{E} &= \bar{V} + R\bar{I} + jX_q \bar{I}_q + jX_d \bar{I}_d\end{aligned}\tag{32}$$

Cujo diagrama fasorial é mostrado na figura 17.

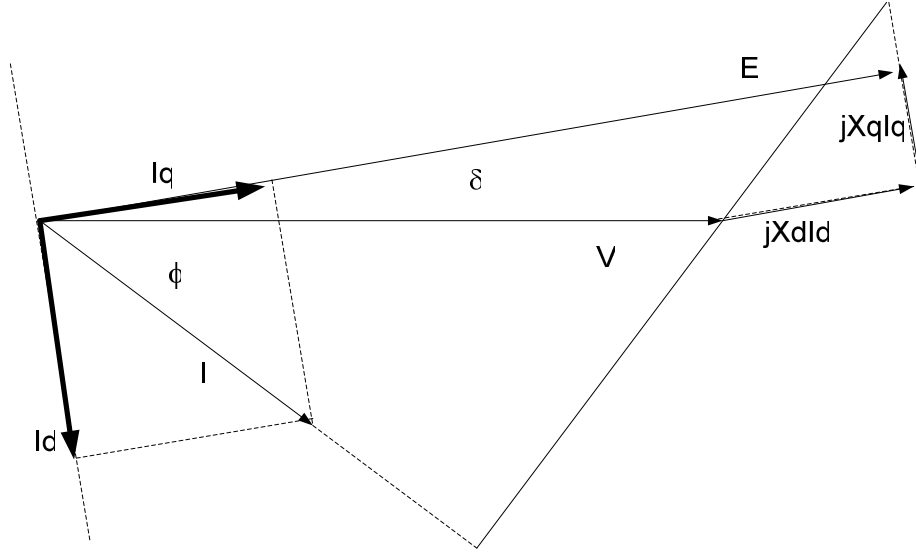


Figura 17: Diagrama fasorial da máquina de pólos salientes.

Observe que os fasores I_d e I_q são definidos em relação à referência da tensão interna E . Normalmente, a referência usada para a análise fasorial da máquina em regime permanente, é a tensão terminal (V), como foi feito em todos os exemplos anteriores. Além disto, o valor do ângulo de carga (δ) não é, a princípio, conhecido.

Os fasores I_d e I_q ficam completamente definidos, em módulo e ângulo quando se conhece o ângulo de carga.

$$\begin{aligned}\bar{I}_d &= I_d \angle \delta - 90 = I \sin(\delta - \phi) \angle \delta - 90 \\ \bar{I}_q &= I_q \angle \delta = I \cos(\delta - \phi) \angle \delta\end{aligned}\quad (33)$$

O grande problema da determinação do diagrama fasorial da figura (17) é o desconhecimento prévio do ângulo de carga. Como consequência, não é possível decompor o fasor de corrente. Para resolver este problema, soma-se zero à equação (32), da seguinte forma:

$$\begin{aligned}0 &= jX_q \bar{I}_d - jX_q \bar{I}_d \\ \bar{E} &= \bar{V} + R\bar{I} + jX_q \bar{I}_q + jX_d \bar{I}_d + jX_q \bar{I}_d - jX_q \bar{I}_d \\ \bar{E} &= \bar{V} + R\bar{I} + jX_q \bar{I} + j(X_d - X_q) \bar{I}_d\end{aligned}\quad (34)$$

Esta equação pode ainda ser simplificada da seguinte forma, lembrando que o fasor jI_d está em fase com o fasor E . Pode-se definir um novo fasor E' que estará em fase com ambos:

$$\begin{aligned}\bar{E}' &= \bar{V} + R\bar{I} + jX_q \bar{I} \\ \bar{E} &= \bar{E}' + j(X_d - X_q) \bar{I}_d\end{aligned}\quad (35)$$

Calculando o número complexo E' obtém-se o valor do ângulo de carga δ . Desta forma é possível calcular a decomposição da corrente e o valor de I_d . Então, o diagrama completo do funcionamento da máquina de pólos salientes pode ser traçado.

Exemplo 14

Uma máquina síncrona de pólos salientes, de 40 MVA, 12 kV, 60 Hz, tem reatância de eixo direto igual a 1,2 pu e de eixo em quadratura igual a 0,8 pu. Esta máquina opera como um motor síncrono que absorve a corrente nominal com fator de potência indutivo igual a 0,9. Determine a tensão de excitação.

Solução

$$S_B = 40 \text{ MVA}$$

$$V_B = 12 \text{ kV}$$

$$I_B = 1,924 \text{ kA}$$

$$Z_B = 3,6 \Omega$$

$$\bar{V} = 1 \angle 0 \text{ pu}$$

$$\bar{I} = 1 \angle -25,84 \text{ pu}$$

$$\bar{E}' = \bar{V} - R\bar{I} - jX_q\bar{I} = 1 - j0,8.1 \angle -25,84 = 0,971 \angle -47,87 \text{ pu}$$

$$\bar{I}_d = I_d \angle \delta - 90 = I \sin(\delta - \phi) \angle \delta - 90 = 1 \cdot \sin(-47,87 + 25,84) \angle -137,87$$

$$\bar{I}_d = -0,375 \angle -137,87$$

$$\bar{E} = \bar{E}' - j(X_d - X_q)\bar{I}_d = 1,121 \angle -47,87 \text{ pu}$$

Observe que a equação foi deduzida para o funcionamento como gerador e este exemplo para o funcionamento motor.

8) Característica $P \times \delta$ da máquina síncrona de pólos salientes

Pode-se deduzir, da mesma forma que foi feito para a máquina de pólos lisos, expressões para as potências ativa e reativa em função do ângulo de carga. Para isto, basta usar a definição de potência complexa. Outra forma de se obter a mesma expressão é usando relações trigonométricas do diagrama fasorial. Analisando a figura 17 observa-se que:

$$\begin{aligned} V \sin \delta &= X_q I \cos(\delta - \phi) \\ \cos(\delta - \phi) &= \frac{V \sin \delta}{X_q I} \end{aligned} \quad (36)$$

Da mesma forma, é possível obter uma relação para o seno de $(\delta - \phi)$:

$$E - V \cos \delta = X_d I \sin(\delta - \phi)$$

$$\sin(\delta - \phi) = \frac{E - V \cos \delta}{X_d I} \quad (37)$$

Lembrando que a potência ativa pode ser colocada em função do cosseno de ϕ e que este pode ser colocado em função das relações (36) e (37), tem-se:

$$P = VI \cos \phi \quad (38)$$

$$\cos \phi = \cos(\delta - \phi) \cdot \cos \delta + \sin(\delta - \phi) \cdot \sin \delta \quad (39)$$

Então:

$$P = V \left\{ \frac{V \sin \delta \cos \delta}{X_q} + \frac{E - V \cos \delta}{X_d} \cdot \sin \delta \right\} \quad (40)$$

Rearranjando os termos, vem:

$$P = \frac{VE \sin \delta}{X_d} + \frac{V^2 \sin 2\delta}{2} \left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \quad (41)$$

Evidentemente, a máquina de pólos lisos é um caso particular da de pólos saliente onde $X_d = X_q = X_s$.

É possível obter uma expressão equivalente para o conjugado uma vez que em regime permanente a velocidade permanece constante. Observe que, na máquina de pólos salientes, existe uma parcela da potência que independe da excitação. Esta parcela é chamada de conjugado de relutância.

Fazendo um procedimento análogo para potência reativa (Q), obtém-se:

$$Q = \frac{VE \cos \delta}{X_d} - V^2 \left(\frac{\sin^2 \delta}{X_q} + \frac{\cos^2 \delta}{X_d} \right) \quad (42)$$

A equação 42 é igual à equação 27 quando $X_d = X_q = X_s$.

Exemplo 15

Traçar a curva $P \times \delta$ para a máquina síncrona de pólos salientes do exemplo anterior.

Solução

$$V = 1 \text{ pu}$$

$$E = 0,82 \text{ pu}$$

$$X_d = 1,2$$

$$X_q = 0,8 \text{ pu}$$

Então a figura do exemplo 15 mostra a característica $P \times \delta$ da máquina.

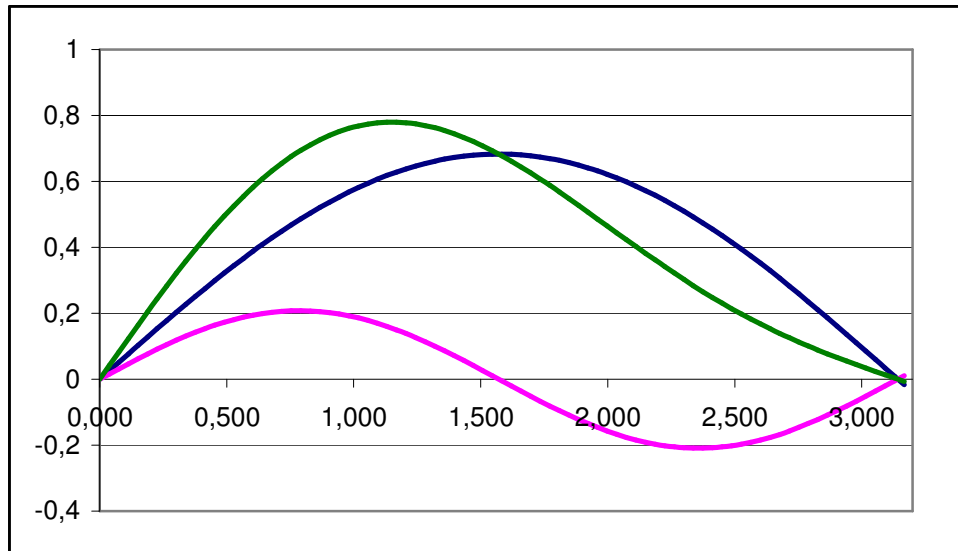


Figura do exemplo 15: característica $P \times \delta$

Pode-se observar que o limite de estabilidade estática é menor que 90° .

9) Referências Bibliográficas

- [1] SEN, P.C. "Principles of Electric Machines and Power Electronics", New York, John Wiley and Sons, 1996.
- [2] MATSCH, L. W., MORGAN, J. D., "Electromagnetic and Electromechanical Machines", Harper and Row, NY, 1986.
- [3] ANDERSON, P.M., FOUAD, A.A., "Power System Control and Stability", IEEE Press, NY, 1993.
- [4] KRAUSE, P.C., WASYNCZUK, O., SUDHOFF, S.D., "Analysis of Electric Machinery", IEEE Press, NY, 1994.
- [5] NASAR, S. A., "Electric Machines and Transformers", Macmillan, NY, 1984.
- [6] NASAR, S. A., "Máquinas Elétricas", Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1984.