

MÁQUINAS DE CORRENTE CONTÍNUA

Ivan Camargo

Revisão 1 (maio de 2007)

1) Introdução

A máquina de corrente contínua é composta por um enrolamento de campo, geralmente colocado no estator, outro enrolamento no rotor, normalmente chamado de enrolamento de armadura, e um comutador composto por escovas e lâminas. A figura 1 mostra esquematicamente uma máquina de corrente contínua elementar.

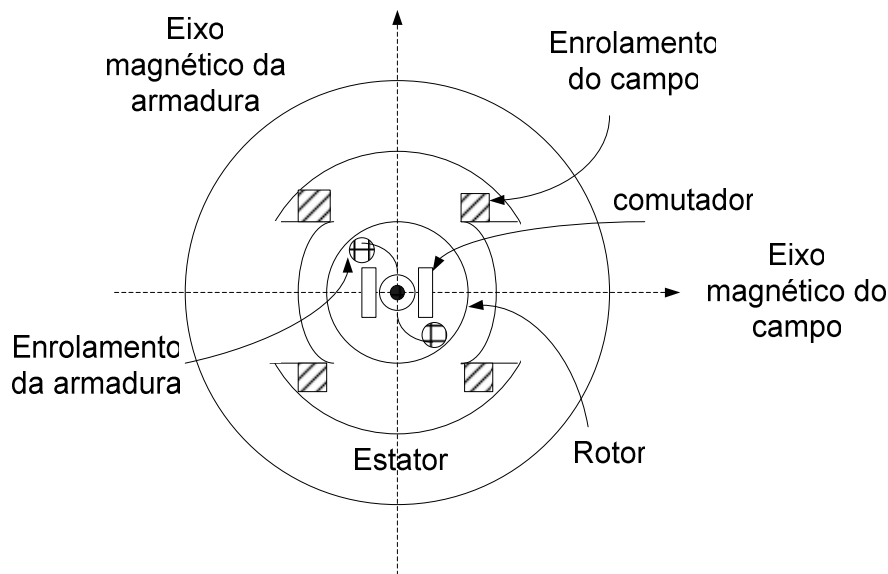


Figura 1: Máquina de corrente contínua elementar.

A máquina de CC elementar é caracterizada por um único enrolamento na armadura e é bastante útil para a introdução de conceitos básicos do funcionamento da máquina.

Exemplo 1

Considerando que o rotor da máquina elementar da figura 1 rode a uma velocidade angular constante " ω ", que o enrolamento de campo seja alimentado por uma corrente contínua i_F e que o enrolamento de armadura esteja em aberto, calcular a tensão gerada nos terminais do enrolamento da armadura.

Solução

Este problema já foi resolvido anteriormente, trata-se de duas bobinas acopladas e a tensão é dada pela lei de Faraday:

$$\begin{aligned}
v_a &= r_a i_a + \frac{d}{dt} \lambda_a \\
v_F &= r_F i_F + \frac{d}{dt} \lambda_F
\end{aligned}
\tag{1}$$

Onde:

$$\begin{bmatrix} \lambda_a \\ \lambda_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{aF} \\ L_{Fa} & L_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_F \end{bmatrix}
\tag{2}$$

O grande problema é a determinação da matriz de indutância. Neste problema específico, como a corrente de armadura é nula (o enrolamento está aberto) basta calcular a indutância mútua entre campo e armadura. É fácil notar que a força magnetomotriz produzida por uma corrente contínua no campo, é uma onda quadrada. Desta forma, o movimento circular da bobina no entreferro faz com que o fluxo concatenado com esta bobina se aproxime de uma senóide com o valor máximo ocorrendo quando os eixos se alinham e com valor nulo quando os eixos estão em quadratura. Assim:

$$L_{aF} = M \cos \theta
\tag{3}$$

Substituindo-se (2) em (1) com a definição dada em (3) e lembrando que a posição relativa dos eixos $\theta = \omega t$:

$$v_a = -M \omega i_F \sin \theta
\tag{4}$$

Observa-se que a tensão gerada é uma função senoidal, que depende do valor da corrente de campo (i_F), da geometria da máquina (M) e da frequência angular de rotação do rotor (ω).

O rotor da Figura 1 é redesenhado na Figura 2, abaixo, para detalhar o funcionamento do comutador.

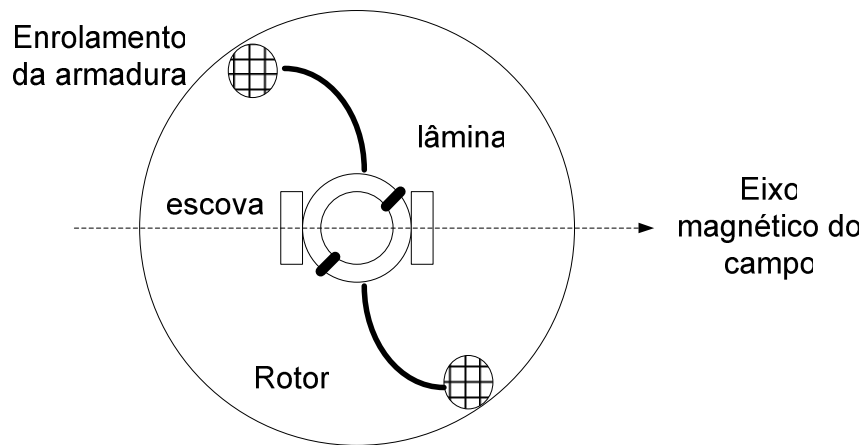


Figura 2: Detalhe do comutador

O comutador é composto lâminas de cobre, isoladas entre si e em contato com os enrolamentos da armadura. As lâminas acompanham o movimento de rotação do rotor da máquina. As escovas são normalmente feitas de grafite e estão fixas no estator, ou seja, com o movimento do rotor as lâminas deslizam sobre as escovas fazendo o contato da parte móvel da máquina com a parte estática.

Exemplo 2

Qual o valor da tensão nos terminais da escova, supondo as mesmas condições do exemplo anterior?

Solução

Foi visto que a forma de onda da tensão na bobina é uma senóide. A rotação do rotor faz com que, em cada meio ciclo, a polaridade do contato com a escova se inverta, assim, a tensão na escova será igual à tensão na bobina no primeiro meio ciclo e igual seu módulo (com sinal oposto) no meio ciclo seguinte. A Figura 3 mostra as duas tensões:

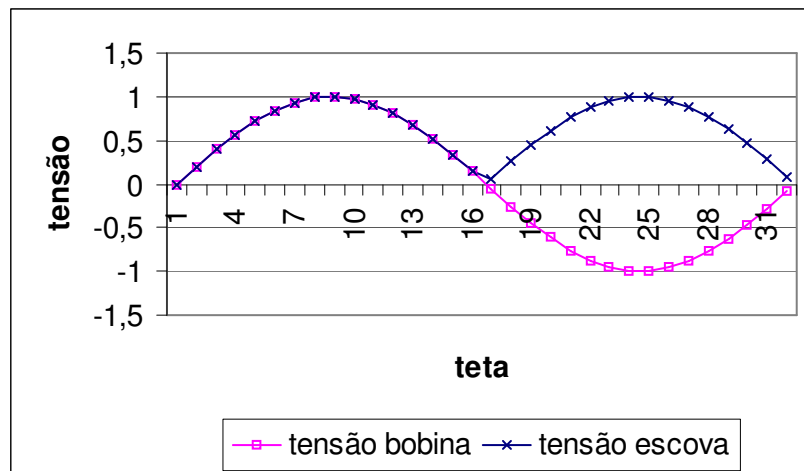


Figura 3: Tensão retificada na escova

Observa-se que o comutador retifica mecanicamente a forma de onda da tensão gerada.

Exemplo 3

Supondo que em vez de apenas uma bobina no rotor, esta máquina tivesse quatro bobinas, defasadas de $\pi/4$ rad, qual seria a tensão gerada nos terminais nos terminais da escova?

Solução

Tudo que ocorre na bobina 1, analisada anteriormente, ocorre também nas outras bobinas com uma defasagem de $\pi/4$. Plotando as senóides em função do tempo tem-se:

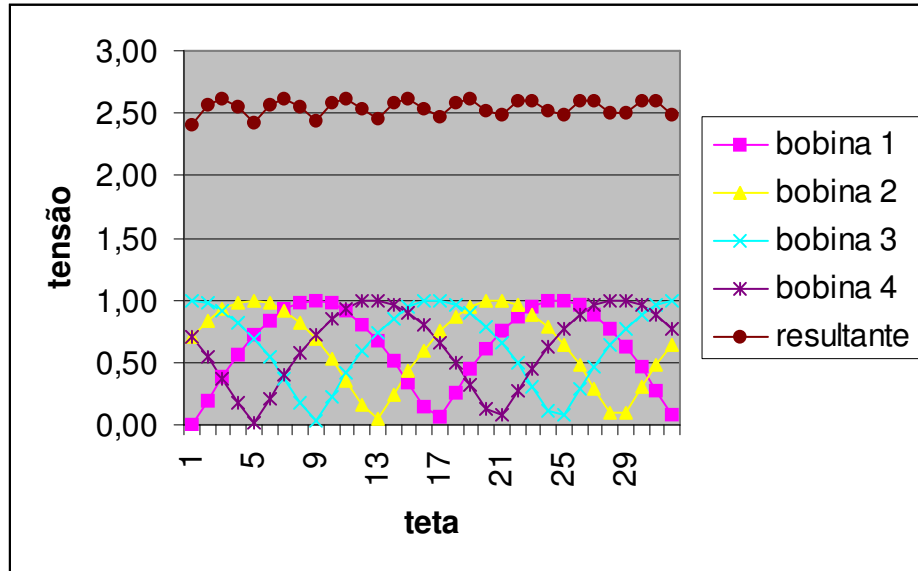


Figura 4: Tensão na escova devido aos enrolamentos distribuídos

Supondo que as bobinas estejam em série, o valor total da tensão será a soma da tensão em cada bobina. As figuras anteriores foram traçadas em planilha Excel.

Exemplo 4

Determinar o valor médio da tensão resultante.

Solução

O valor da tensão média em uma bobina é calculado de forma muito simples: é dado pela integral da função no período dividido pelo período (definição de valor médio).

$$E(1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} v_a(\theta) d\theta \quad (5)$$

Usando a expressão da tensão em uma bobina obtida em (4), vem:

$$E(1) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} -M\omega_i \sin \theta d\theta \quad (6)$$

O sinal negativo da função senoidal desaparece pela ação do comutador. De fato, como foi visto no exemplo anterior, a forma de onda da tensão nas escovas é dada pelo valor absoluto da função senoidal. Desta forma, efetuando a integração:

$$E(1) = \frac{2}{\pi} M\omega_i \quad (7)$$

Considerando que se tenha N_a espiras na armadura, a tensão média nos terminais da armadura (E) será dada pela soma dos valores médios em cada bobina:

$$E = \frac{2}{\pi} N_a M \omega i_F \quad (8)$$

Observe que a indutância mútua “M” foi definida como o valor máximo do fluxo concatenado com uma bobina da armadura em relação ao fluxo produzido pelo campo, pode-se definir uma constante L_{AF} , com as mesmas características de uma indutância, que relacione o fluxo concatenado com as N_a bobinas e levando em consideração o efeito do comutador:

$$L_{AF} = \frac{2}{\pi} N_a M \quad (9)$$

Então:

$$E = L_{AF} \omega i_F \quad (10)$$

A tensão nos terminais da escova é proporcional à velocidade e à corrente de campo, além, é claro, das características físicas da máquina.

Exemplo 5

Obter uma expressão para a tensão em função do fluxo produzido pelo campo.

Solução

O fluxo concatenado com a bobina de armadura (quando ela está em vazio) é proporcional ao produto da indutância equivalente pela corrente de campo, ou seja:

$$k\phi_F = L_{AF} i_F \quad (11)$$

Então

$$E = k\phi_F \omega \quad (12)$$

Esta é a expressão que é encontrada com mais frequência nos livros didáticos. Ela é interessante por que não restringe a análise da máquina CC a problemas lineares. A não linearidade da curva de magnetização pode ser levada em consideração usando (12) em vez de (10).

Exemplo 6

Qual o conjugado produzido em uma bobina da armadura devido ao fluxo produzido pelo campo.

Solução

Supondo que uma corrente i_a circule pela armadura, tem-se, diretamente da definição do conjugado:

$$\Gamma_e = \frac{1}{2} [i_a \quad i_F] \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \begin{bmatrix} L_{aa} & M \cos \theta \\ M \cos \theta & L_{FF} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} i_a \\ i_F \end{bmatrix} \quad (13)$$

A rigor, a indutância própria L_{aa} é função da posição θ , uma vez que o entreferro não é constante. No entanto, este efeito será desprezado e, como será visto adiante, o comutador e os enrolamentos distribuídos da armadura de certa forma anulam este efeito.

Fazendo a derivada e o produto matricial obtém-se:

$$\Gamma_e(1) = -M i_a i_F \sin \theta \quad (14)$$

Vários problemas idênticos a este foram resolvidos anteriormente. O sinal negativo na expressão do conjugado significa que o conjugado tende a alinhar os dois eixos magnéticos. Considerando o sentido definido, nas próximas expressões este sinal será desconsiderado.

Exemplo 7

Calcular o conjugado médio que uma bobina é submetida ao longo de uma volta completa do rotor.

Solução

Como foi visto no exemplo anterior, o conjugado em cada bobina depende da sua posição. Como a bobina é composta por dois fios defasado π rad, basta calcular o valor médio para meio período, portanto:

$$\Gamma_e(\text{médio}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Gamma_e(1) d\theta \quad (15)$$

$$\Gamma_e(\text{médio}) = \frac{2}{\pi} M i_a i_F \quad (16)$$

Da mesma forma que foi feito para a tensão, o conjugado médio em N espiras da armadura será a soma do conjugado médio em cada bobina, então:

$$\Gamma_e = \frac{2}{\pi} N_a M i_a i_F \quad (17)$$

Usando a mesma definição de L_{AF} , tem-se:

$$\Gamma_e = L_{AF} i_a i_F \quad (18)$$

O conjugado é função dos dados construtivos da máquina, da corrente de armadura e da corrente de campo. Evidentemente, é possível colocar esta expressão em função do fluxo:

$$\Gamma_e = k \phi_F i_a \quad (19)$$

Observe que a constante que multiplica o fluxo na tensão da armadura e no conjugado é a mesma. Esta mesma conclusão poderia ser obtida diretamente da definição de conservação de energia, de fato, dividindo a equação (12) pela equação (19) tem-se:

$$\frac{E}{\Gamma_e} = \frac{\omega}{i_a} \quad (20)$$

ou

$$E i_a = \Gamma_e \omega \quad (21)$$

Ou seja, no conversor eletromagnético ideal a potência elétrica de entrada é convertida em potência mecânica no eixo.

2) Funcionamento do Comutador

A Figura 5 mostra o rotor de uma máquina de corrente contínua, com oito bobinas distribuídas ao longo de oito ranhuras (com duas barras por ranhura).

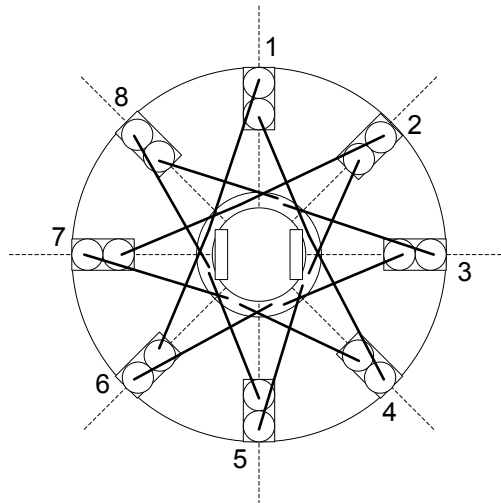


Figura 5: Funcionamento do comutador

A Figura 5 exige alguns esclarecimentos: existem oito lâminas, isolada entre si, no eixo do rotor; cada barra é conectada a uma lâmina; os barramentos inferiores são conectados (por trás da figura) aos superiores diametralmente opostos. As escovas são normalmente posicionadas externamente às lâminas, para maior clareza da figura elas foram colocadas internamente.

Exemplo 8

Se uma fonte de corrente i_a é injetada na escova da direita, determinar a circulação desta corrente ao longo das bobinas da armadura.

Solução

A Figura 6 mostra a circulação da corrente.

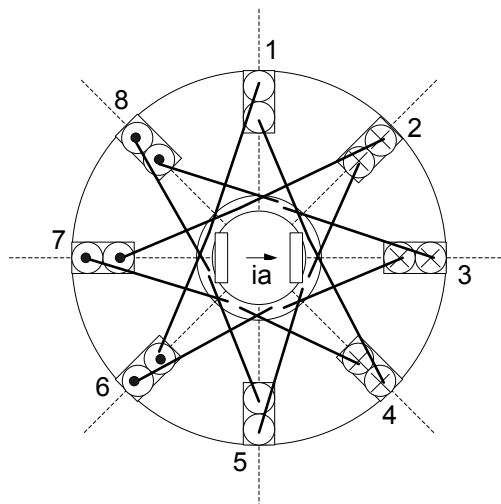


Figura 6: Distribuição da corrente

Observe que os barramentos das ranhuras 1 e 5 estão curto-circuitados pelas escovas. Observe também que a corrente está no sentido de entrar no papel no lado direito da figura (marcado como um “x”) e sair no lado esquerdo (marcado com um ponto). O efeito resultante desta corrente é o de uma força magnetomotriz ortogonal àquela produzida pelo campo.

Exemplo 9

Repita o procedimento considerando que uma pequena rotação ($\pi/8$) seja dada no rotor, ou seja, que a escova fique em contato com apenas uma lâmina.

Solução

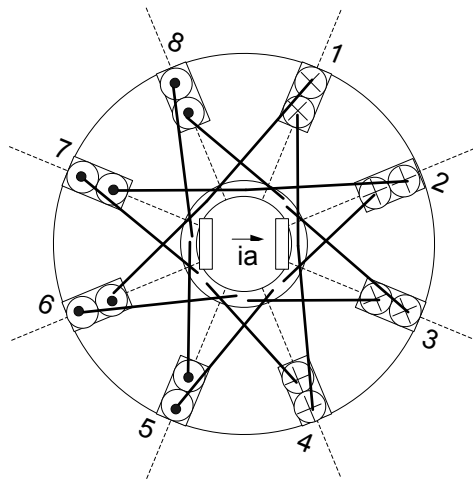


Figura 7: Comutador em rotação

O valor da corrente na bobina da ranhura 1 passou de zero para i_a . Repetindo o procedimento, a corrente na bobina da ranhura 2 vai passar de i_a entrando no papel (que se pode convencionar como negativo) para i_a saindo do papel neste $1/16$ de ciclo. A forma de onda da corrente em uma bobina durante a comutação, considerando que esta ocorra de forma linear é mostrada na Figura 8.

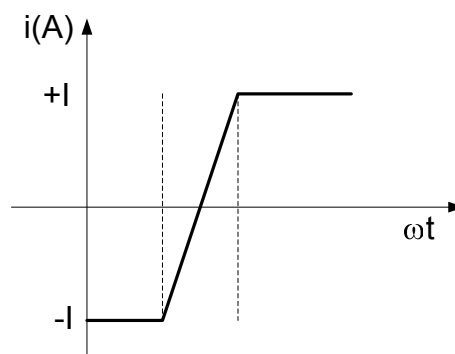


Figura 8: Período de comutação

O período de comutação (ou tempo de comutação) depende basicamente da velocidade de rotação do rotor, ou seja, do tempo de contato da escova com a lâmina. A taxa de variação da corrente na bobina depende da indutância da bobina. Nem sempre os dois valores são iguais. Em algumas situações a escova perde o contato com a lâmina antes da corrente ter atingido o seu valor final. Neste caso ocorre o faiscamento no comutador. Esta ocorrência danifica a escova aumentando a necessidade de manutenção desta máquina. Além disto, por este motivo, a utilização deste motor em ambientes “explosivos” é fortemente desaconselhada.

3) Circuito Equivalente da Máquina de Corrente Contínua

Foi deduzido nos itens anteriores as equações principais da máquina de corrente contínua. Observou-se que a rotação do rotor produz na armadura uma tensão proporcional à velocidade e ao campo produzido pelo enrolamento do estator. Por outro lado, a corrente que circula no enrolamento da armadura não induz nenhuma queda de tensão no campo por que, por efeito do comutador, o fluxo produzido por ela está sempre ortogonal ao enrolamento de campo. A equação elétrica das duas bobinas pode ser colocada, então da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} v_a \\ v_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_a & 0 \\ 0 & r_F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} pL_{aa} & L_{AF}\omega \\ 0 & pL_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_F \end{bmatrix} \quad (22)$$

Onde o operador “p” foi colocado no lugar do operador diferencial “d/dt”.

Esta equação pode ser bastante simplificada considerando o sistema em regime permanente. Considerando que as correntes são constantes, a sua variação com o tempo é nula, portanto:

$$v_a = r_a i_a + E \quad (23)$$

$$v_F = r_F i_F \quad (24)$$

A equação mecânica é dada por:

$$\Gamma_e - \Gamma_m = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + B \frac{d\theta}{dt} \quad (25)$$

Onde “J” é a constante de inércia do rotor somado à carga que ele está acionando, “B” é coeficiente de atrito dos mancais (que normalmente pode ser desprezado), Γ_m é o conjugado mecânico da carga e o conjugado elétrico (Γ_e) é obtido a partir do cálculo das correntes e é dado por:

$$\Gamma_e = L_{AF} i_a i_F \quad (26)$$

Em regime permanente, com velocidade constante, a equação mecânica se reduz a:

$$\Gamma_e = \Gamma_m \quad (27)$$

Descrever as equações (23) e (24) através de um circuito equivalente é muito simples, basta considerar uma fonte de tensão controlada em função da velocidade (E). A Figura 9 mostra este diagrama.

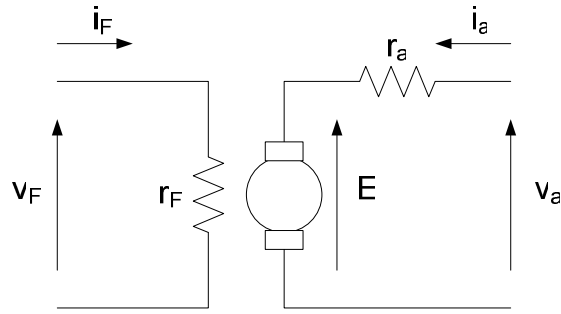


Figura 9: Circuito Equivalente do motor de corrente contínua

Todas as deduções foram feitas considerando que as bobinas tivessem um comportamento de uma carga, ou seja, o conversor funcionando como motor. É fácil observar na Figura 9 que a potência ativa positiva é aquela que está sendo injetada no motor. Para considerar como positiva a potência elétrica que sai do motor (convenção gerador), basta inverter o sentido positivo da corrente. Para que não haja confusão a corrente de armadura considerada positiva saindo do gerador será chamada i_g .

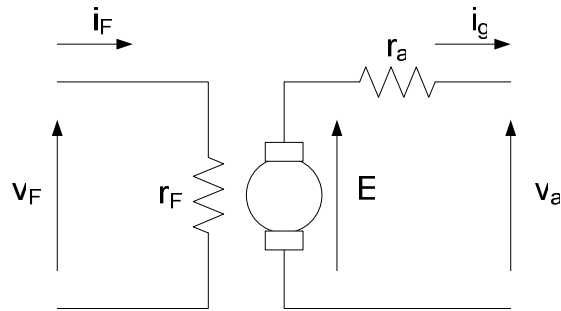


Figura 10: Circuito Equivalente do Gerador de Corrente Contínua em Regime Permanente

A equação de tensão da armadura, com esta mudança de convenção, fica:

$$V = E - r_a i_g \quad (28)$$

Exemplo 10

Se um gerador CC for acionado mecanicamente a uma velocidade constante ω_0 , e a corrente de campo for variada de 0 até o seu valor máximo, qual será a tensão medida nos terminais da armadura se esta estiver em vazio?

Solução

Se o gerador está em vazio, então ($i_a = 0$):

$$V = E \quad (29)$$

A equação (10) mostra que a tensão interna (E) é proporcional à corrente de campo quando a velocidade for constante.

$$E = L_{AF} \omega_0 i_F \quad (30)$$

Esta proporcionalidade só é válida quando o circuito magnético não estiver saturado. A equação (12) mostra que a tensão é proporcional ao fluxo e que, o aumento da força magnetomotriz não implica em aumento no fluxo quando o material está saturado.

$$E = k \phi_F \omega_0 \quad (31)$$

Assim, a relação entre a tensão terminal e a corrente de campo será muito parecida com a curva de magnetização do material e é mostrada na Figura (11).

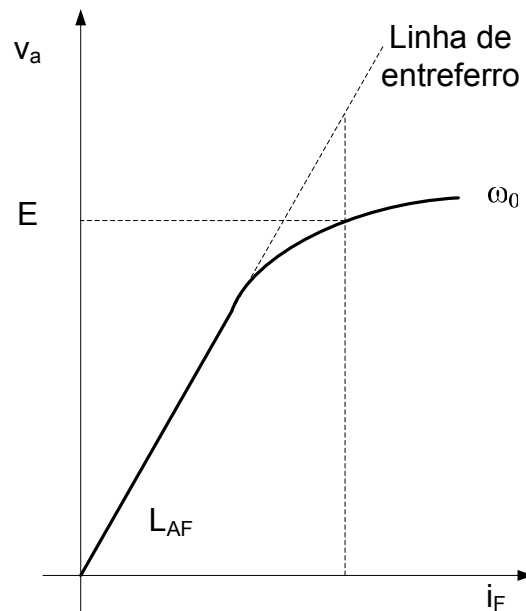


Figura 11: Curva de Magnetização da Máquina de Corrente Contínua

O trecho linear da curva é chamado de “linha de entreferro”. O coeficiente L_{AF} definido anteriormente pode ser facilmente obtido através deste ensaio.

Exemplo 11

Foi feito o ensaio em vazio, a uma velocidade de 200 rad/s em uma máquina CC e, para uma corrente de campo $i_F = 5$ A, obteve uma tensão terminal igual a $V = 200$ V. Qual a velocidade que a máquina estará rodando se for aplicada uma tensão de 200 V em seus terminais e, mantendo as mesmas condições do campo, a corrente de armadura medida for de 2 A. Considerar que a resistência de armadura seja igual a 5Ω .

Solução

Da equação de tensão (23) do motor em regime permanente, tem-se diretamente:

$$E = V - r_a I_a = 200 - 10 = 190V \quad (32)$$

Como

$$E_0 = k\phi_F \omega_0 \quad (33)$$

$$k\phi_F = 1 \text{ Vs / rad} \quad (34)$$

Portanto:

$$\omega = \frac{E}{k\phi_F} = 190 \text{ rad / s} \quad (35)$$

De uma forma geral, quando não há variação do fluxo em uma determinada condição do campo:

$$\frac{E}{\omega} = \frac{E_0}{\omega_0} \quad (36)$$

4) Tipos de Máquinas de acordo com o seu enrolamento de excitação

Como, tanto a tensão de armadura quanto a tensão do campo são tensões CC, em muitas situações pode-se usar a mesma fonte para alimentar os dois enrolamentos. Dependendo de como estes enrolamentos forem ligados a máquina de CC pode ser:

4.1) Com Excitação em separado

A Figura 10 mostra o esquema das ligações para a excitação em separado e as equações de tensão são dadas por:

$$v_a = r_a i_a + E \quad (37)$$

$$v_F = r_F i_F \quad (38)$$

A característica desta máquina é que o campo é independente da armadura.

4.2) Com Excitação em Série

O enrolamento de campo está em série com o enrolamento de armadura como mostra a Figura 12.

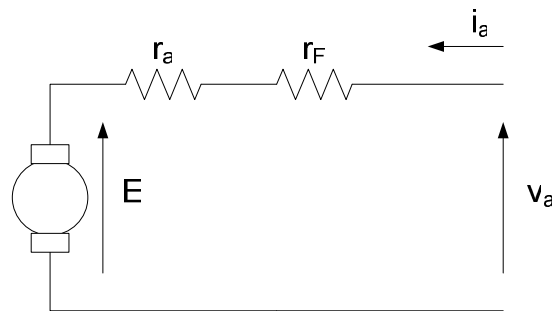


Figura 12: Motor com excitação em série

As equações em regime permanente são obtidas diretamente da figura e são dadas por:

$$i_a = i_F \quad (39)$$

$$v_a = (r_a + r_F) i_a + E \quad (40)$$

Como o enrolamento de campo está em série com a armadura, grandes correntes passam pelo campo. Este enrolamento é caracterizado por baixa resistência. Normalmente é feito com poucas espiras e com fio razoavelmente grosso.

4.3) Com Excitação em paralelo

O enrolamento de campo está em paralelo com o enrolamento de armadura como mostra a Figura 13.

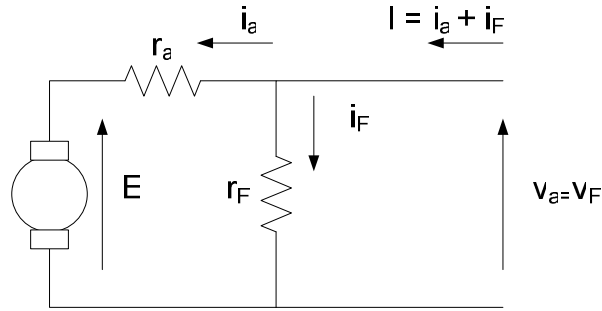


Figura 13: Máquina CC com excitação em paralelo

As equações são obtidas diretamente do esquema da Figura 13.

$$I = i_a + i_F \quad (41)$$

$$v_a = v_F = r_a i_a + E = r_F i_F \quad (42)$$

Como o enrolamento de excitação está em paralelo com a armadura, para que uma corrente pequena circule por ele, sua construção é feita com muitas espiras e alta resistência.

4.4) Com excitação composta

A excitação composta é feita com enrolamento série e outro em paralelo. Os fluxos dos dois enrolamentos podem se somar no entreferro (composta ADITIVA) ou se subtrair (composta SUBTRATIVA). Por outro lado, visto dos terminais da máquina, o enrolamento de campo série pode estar depois do enrolamento paralelo (composta LONGA) ou antes (composta CURTA). As equações em regime permanente de cada um destes modelos podem ser facilmente obtidas a partir dos seus respectivos diagramas. Estas equações serão mostradas em exemplos específicos.

Finalmente, as máquinas CC podem ser excitadas por um ímã permanente, neste caso, a máquina se comporta como uma excitação independente. Normalmente estas máquinas são pequenas.

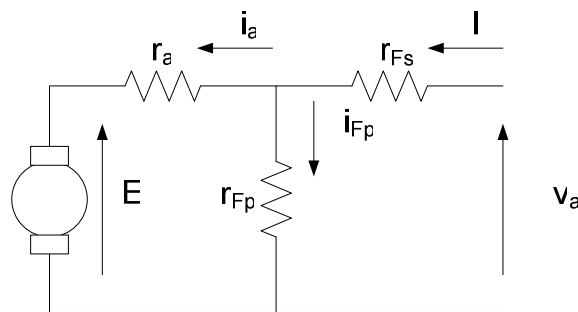


Figura 14: Excitação composta (curta)

5) Características de Operação do Gerador de Corrente Contínua

As características de operação de um gerador de CC dependem basicamente da conexão dos seus enrolamentos. Em geral, quando se analisa um gerador de CC, supõe-se que a sua fonte de energia mecânica mantenha uma velocidade constante. Desta forma, não tem sentido analisar a equação mecânica já que a sua solução é um dado do problema e o que se deseja é verificar como a tensão terminal varia com o aumento da carga.

É preciso ficar claro que a variação da carga, pela própria definição, é um processo dinâmico. A análise da variação da carga em regime permanente é uma simplificação considerando que em cada ponto a máquina fique um tempo suficientemente grande em relação às constantes de tempo elétricas da máquina.

Exemplo 12

Determinar a tensão terminal de um gerador CC com excitação independente supondo que sua carga passe de zero ao seu valor nominal.

Solução

Trata-se de um exemplo semelhante ao exemplo 10 variando a corrente de armadura em vez da corrente de campo. Para um determinado valor de corrente de campo a tensão terminal é dada pela curva de magnetização da máquina (Figura 11).

A corrente de armadura altera a tensão terminal em três aspectos:

- a) queda de tensão resistiva;
- b) queda de tensão nas escovas; e
- c) queda de tensão devido à reação da armadura.

A primeira e a segunda são conseqüências diretas da equação de tensão.

$$V = E - r_a i_a \quad (43)$$

Onde r_a pode incluir os efeitos da queda de tensão nas escovas. Alguns autores preferem representar a queda de tensão nas escova por um valor constante, independente da corrente, neste caso a equação de tensão ficaria:

$$V = E - r_a i_a - e_{esc} \quad (44)$$

Onde e_{esc} é a queda de tensão devido às escovas.

O terceiro aspecto se refere à distorção do fluxo de campo devido ao fluxo produzido pela armadura. A Figura 14 mostra esquematicamente o que ocorre.

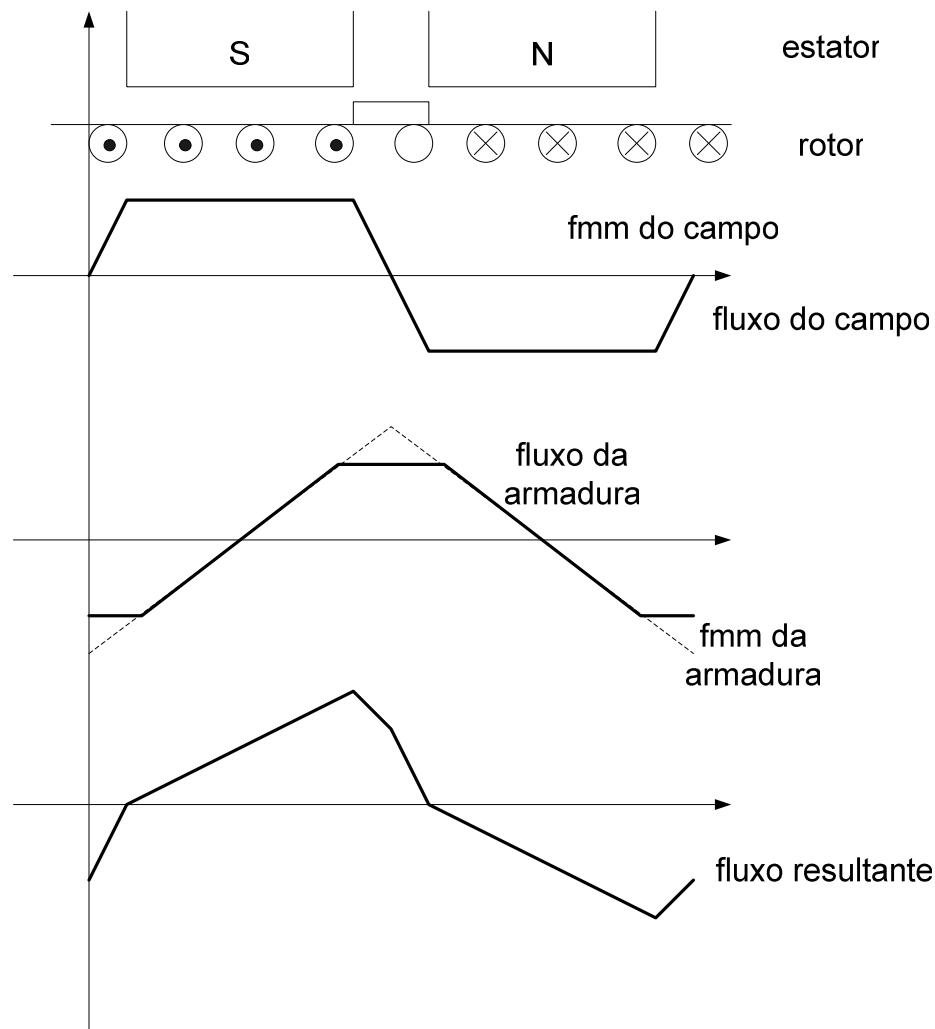


Figura 15: Efeito da Reação da Armadura

Algumas explicações para a Figura 14: a força magnetomotriz produzida pelo campo é uma onda trapezoidal. O fluxo é semelhante uma vez que o entreferro visto do estator é constante. A fmm produzida pela armadura tem forma triangular. O fluxo produzido é maior nas regiões de menor relutância, ou seja, nos pólos do estator. O fluxo resultante seria a soma linear do fluxo do campo e da armadura se o sistema fosse linear. Como o material ferromagnético é não linear, dependendo dos níveis de corrente no campo e na armadura, pode haver a saturação e o fluxo resultante ficar reduzido devido ao efeito da reação da armadura.

De qualquer forma, a reação da armadura produz um deslocamento da curva de fluxo resultante em relação ao eixo magnético da armadura. Como foi visto anteriormente, é interessante que o fluxo passe por zero na região da escova para que a comutação (ou o curto-circuito entre as espiras de uma bobina) ocorra em tensão nula. Isto prejudica a comutação. Em algumas máquinas, para contornar este efeito, são instalados enrolamentos entre os pólos (alimentada pela corrente de armadura).

Levando-se em consideração estes efeitos a curva relacionando tensão terminal com corrente de carga (para velocidade e corrente de campo constantes) é mostrada na Figura 15.

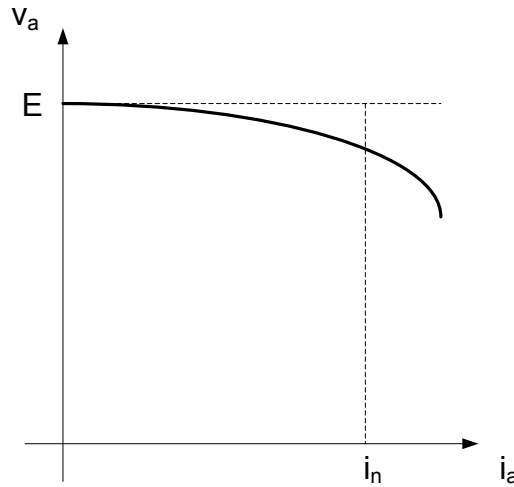


Figura 15: Tensão terminal em função da corrente de carga

Exemplo 13

Se um gerador, com excitação em paralelo, for acionado a uma velocidade constante ω_0 , qual será a tensão em seus terminais em regime permanente e em aberto.

Solução

O caso do gerador com excitação em paralelo é diferente já que, a princípio o fluxo do campo depende da tensão gerada que, por sua vez, depende do fluxo do campo.

$$E = k\phi_F\omega \quad (45)$$

e

$$i_F = \frac{v_a}{r_F} \quad (46)$$

Como foi visto nos exemplos anteriores, em vazio a tensão terminal $v_a = E$, portanto inicialmente igual a zero fazendo que i_F também seja igual a zero e o fluxo de campo permaneça inalterado.

No entanto, se houver um fluxo residual no campo $\phi_F(0)$, com a aceleração do gerador este fluxo geraria uma pequena tensão nos terminais do enrolamento de campo que produziria uma corrente de campo que (se estiver na mesma polaridade do fluxo residual) aumenta o fluxo que aumenta a tensão e aumenta a corrente até o processo se estabilizar em um ponto onde a curva de magnetização cruzar a curva relacionando corrente de campo com tensão

terminal, ou seja, uma reta cuja inclinação é r_F . A Figura 16 ilustra este processo que é chamado de ESCORVAMENTO do gerador de corrente contínua.

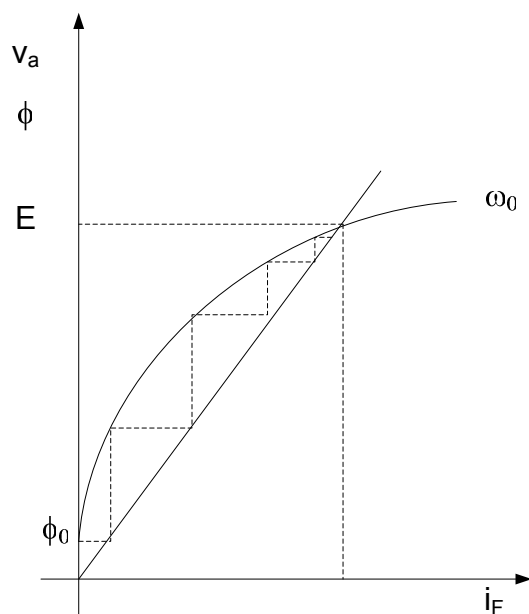


Figura 16: Escorvamento do gerador de corrente contínua com excitação em paralelo

Observe que se a resistência do enrolamento de campo for muito grande não haverá escorvamento. O máximo valor da resistência de campo é aquele que iguala a inclinação da linha de entreferro- alguns autores chamam esta resistência de CRÍTICA. Além disto, a característica de tensão terminal em função da corrente de carga é semelhante àquela mostrada para excitação independente. A única diferença é que o aumento da corrente produzindo redução na tensão terminal, produz também redução no fluxo que implica em redução na tensão interna (E).

Exemplo 14

Determinar a característica de tensão terminal em função da corrente de carga para um gerador composto.

Solução

A característica $V \times I$ de um gerador CC composto depende do número de enrolamentos de campo em série e em paralelo. Se o enrolamento de campo for basicamente um enrolamento em paralelo a característica será parecida com aquela mostrada na Figura 15. No entanto, o enrolamento de campo série pode compensar a queda de tensão produzida pela reação da armadura aumentando o fluxo total do campo. De fato, a tensão interna de uma máquina composta aditiva é dada por:

$$E = k(\phi_F(série) + \phi_F(paralelo))\omega \quad (47)$$

O número de bobinas no enrolamento série pode ser calculado de forma a compensar as quedas de tensão devido à resistência e à reação da armadura. Neste caso a máquina é chamada de composta plana (ou “*flat compound*”). Se houver mais bobinas no enrolamento série ela será chamada de super composta (ou “*over compound*”) e se houver menos será chamada de subcomposta (ou “*under compound*”). A característica do gerador composto subtrativo é pior do que a do gerador paralelo simples. Estas características estão mostradas na Figura 17.

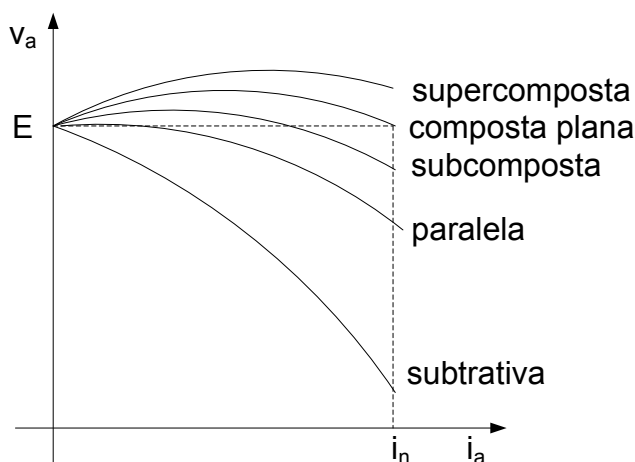


Figura 17: Característica $V \times I$ dos geradores CC com excitação composta

Convém notar que se o que se espera de um bom gerador é que ele mantenha uma tensão constante nos seus terminais independente da carga, a melhor configuração para um gerador CC é a composta plana.

Exemplo 15

Determinar a característica $V \times I$ para um gerador com excitação em série.

Solução

A característica principal da máquina CC série é que a corrente de carga é igual a corrente de campo. Em vazio, portanto, não haveria fluxo no campo nem tensão nos terminais do gerador. Pode-se considerar que haja um fluxo residual na máquina, neste caso, quando a máquina for acionada na sua velocidade nominal haverá uma pequena tensão nos seus terminais. O aumento da carga provocará um aumento na corrente de campo que é responsável pelo fluxo, assim a característica de tensão em função da corrente de armadura (de carga ou de campo) do gerador CC série será muito parecida com a sua curva de magnetização. Note que depois do seu valor nominal, o aumento da corrente não provoca aumento no fluxo devido a saturação e os efeitos de queda de tensão devido às resistências e a reação da armadura se acentua fazendo com que a tensão terminal diminua com a corrente. A Figura 18 mostra esta característica.

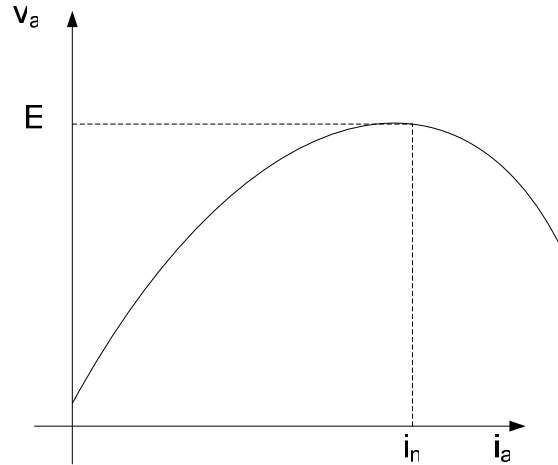


Figura 18: Característica V x I para o gerador CC série

Observa-se que um gerador com esta característica só deve ser usado em condições muito particulares.

6) Característica de Operação do Motor de Corrente Contínua

Ao contrário do gerador, o motor de corrente contínua, normalmente é alimentado por uma fonte de tensão constante e a característica que mais interessa é o comportamento da sua velocidade em função do aumento da carga mecânica. Note que em regime permanente o conjugado mecânico é sempre igual ao elétrico (Equação (27)).

Exemplo 16

Traçar a curva do conjugado em função da velocidade para um motor com excitação em separado.

Solução

Considerando a tensão da fonte constante, a corrente de armadura vai depender exclusivamente da velocidade. O conjugado é função da corrente de armadura portanto será uma função linear da velocidade. Se a fonte de tensão é constante, a característica do motor com excitação independente é idêntica ao com excitação em paralelo. Desta forma vai-se considerar que $v_F = V$. O conjugado em função da velocidade é dado por:

$$\Gamma_e = L_{AF} i_F i_a \quad (48)$$

$$i_a = \frac{V - E}{r_a} \quad (49)$$

$$E = L_{AF} \omega i_F \quad (50)$$

$$i_F = \frac{V}{r_F} \quad (51)$$

Substituindo nas equações anteriores, tem-se:

$$i_a = \frac{V}{r_a} \left\{ 1 - \frac{L_{AF} \omega}{r_F} \right\} \quad (52)$$

$$\Gamma_e = \frac{L_{AF} V^2}{r_a r_F} \left\{ 1 - \frac{L_{AF} \omega}{r_F} \right\} \quad (53)$$

A curva está mostrada na Figura 19.

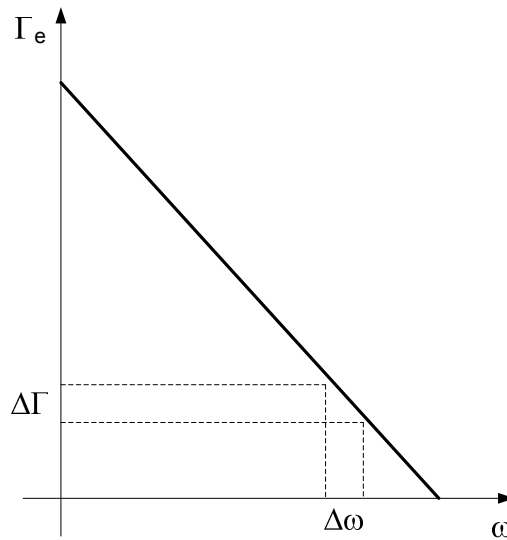


Figura 19: Característica conjugado e corrente em função da velocidade

As equações (52) e (53) permitem tirar muitas conclusões. A declividade da curva é negativa. Isto é muito importante porque caracteriza um comportamento estável da máquina. De fato, um aumento da carga mecânica produzirá uma redução da velocidade (em função da equação mecânica (25)). Esta redução da velocidade provoca aumento na corrente e no conjugado elétrico que se equilibra com o mecânico em um outro ponto de operação. Além disto, a declividade é muito grande (função do quadrado da tensão aplicada), desta forma a sua operação normal pode ser considerada como a velocidade aproximadamente constante. Finalmente observa-se que a corrente de partida é muito grande, limitada apenas pela resistência da armadura, portanto em geral, são necessários mecanismos especiais para partida de motores de corrente contínua.

Exemplo 18

Traçar a curva do conjugado em função da velocidade para um motor de corrente contínua com excitação em série.

Solução

No caso do motor CC série as equações ficam:

$$i_a = i_F = I \quad (54)$$

$$I = \frac{V}{r_a + r_F + \omega L_{AF}} \quad (55)$$

$$\Gamma_e = L_{AF} I^2 \quad (56)$$

$$\Gamma_e = \frac{L_{AF} V^2}{(r_a + r_F + \omega L_{AF})^2} \quad (57)$$

Cuja curva é mostrada na Figura 20.

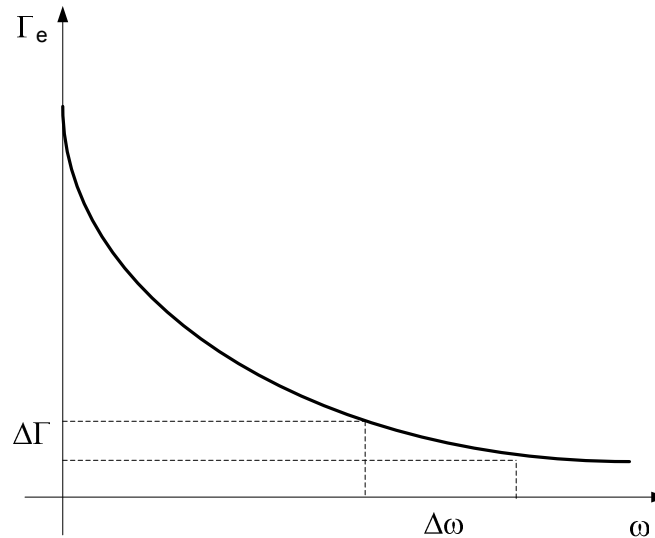


Figura 20: $\Gamma \times \omega$ para um motor CC série

Algumas conclusões importantes podem ser tiradas da Figura 20. O motor série tem um alto conjugado de partida já que a corrente é muito grande e o conjugado é proporcional ao seu quadrado. A corrente de partida deve também ser limitada. A velocidade é altamente variável com a carga. Este tipo de máquina não pode operar em vazio – se o conjugado mecânico for para zero a velocidade tende a infinito.

Uma aplicação usual para este tipo de motor é na tração elétrica. Observe que as características são favoráveis: alto conjugado de partida e nunca opera sem carga (a carga mínima é o vagão do trem sem passageiros).

7) Análise do Rendimento de uma máquina de corrente contínua

O circuito equivalente da máquina de corrente contínua representa corretamente o funcionamento da máquina em regime permanente considerando, inclusive, as perdas elétricas nos enrolamentos de campo e de armadura.

As perdas mecânicas se devem basicamente ao atrito nos mancais e nas escovas e a ventilação.

Em algumas situações, convém levar em consideração as perdas chamadas de suplementares referentes à corrente de Foucault e a distorções na forma de onda do fluxo. Estas perdas, tipicamente, podem chegar a 1% da potência de saída.

A Figura 21 mostra, esquematicamente, as perdas em um gerador CC.

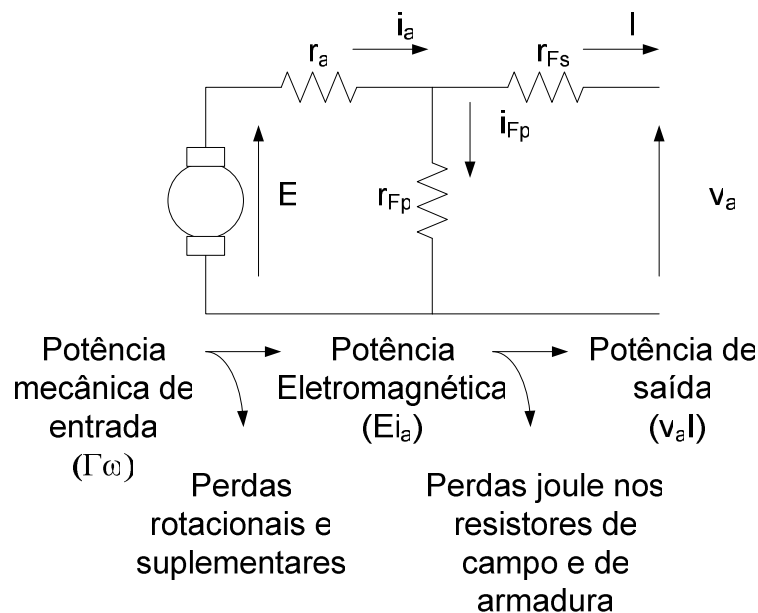


Figura 21: Diagrama das perdas em um gerador CC

O diagrama do motor é idêntico invertendo-se a entrada e a saída. Em qualquer caso o rendimento é dado por:

$$\eta = \frac{P_{out}}{P_{in}} \quad (58)$$

Exemplo 19

Dada a curva de magnetização a 1800 rpm de um motor CC “*shunt*” de 25 HP, 250 V, 84 A. A resistência de campo é de $184 \, \Omega$, a resistência de armadura de $0,082 \, \Omega$. O campo tem 3000 espiras. O efeito desmagnetizante da reação da armadura é de 0,09 A em função da corrente de campo. As perdas rotacionais em vazio são de 1.300 W e as perdas suplementares correspondem a 1% da potência de saída. Calcular:

- a) a velocidade do motor quando $I = 84 \, \text{A}$;
- b) a potência eletromagnética;
- c) a potência de saída;
- d) o conjugado de saída; e
- e) o rendimento do motor.

Solução

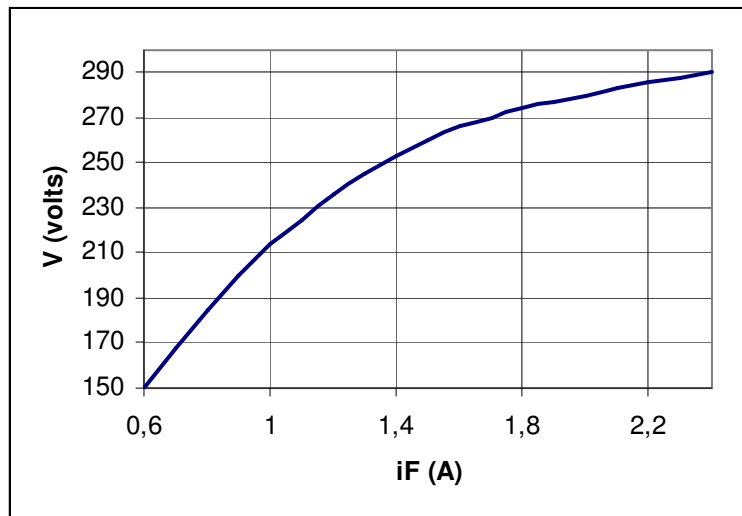


Figura 22: Curva de magnetização do motor do exemplo 19

É dada a corrente e a tensão aplicada, portanto as correntes em todos os enrolamentos são facilmente calculadas:

$$I = 84 \, \text{A}$$

$$V = 250 \, \text{V}$$

$$r_F = 184 \, \Omega \rightarrow i_F = 1,36 \, \text{A}$$

$$i_a = I - i_F = 82,6 \, \text{A}$$

A tensão interna da máquina (ou tensão de armadura) é dada por:

$$E = V - r_a i_a = 243,2 \, \text{V}$$

Levando em consideração o efeito desmagnetizante da reação da armadura, a corrente de campo será descontada de 0,09 A como foi dado no enunciado.

$$i_F' = 1,36 - 0,09 = 1,27 \text{ A}$$

Olhando na curva de magnetização (Figura 22) observa-se que, se a velocidade fosse 1800 rpm a tensão interna da máquina seria 242 V. Portanto usando a regra da proporcionalidade entre a tensão interna e a velocidade obtém-se:

$$a) \ n = \frac{n_0 E}{E_0} = \frac{1.800 \times 243,2}{242} = 1.809 \text{ rpm}$$

Este exemplo mostra uma situação interessante: a velocidade em vazio (1.800 rpm) é menor que a velocidade em carga. Este efeito ocorre devido à reação da armadura, ou à redução de 0,09 A na corrente efetiva de campo. Observe que, nestas condições, a característica conjugado velocidade que, como foi visto, tem que ter uma inclinação negativa para ser estável, passa a ter uma inclinação positiva, ou seja, instável.

Para solucionar este problema usa-se os chamados ENROLAMENTOS ESTABILIZANTES que são enrolamentos em série com a corrente de armadura que aumentam o fluxo com o aumento da corrente. Estes enrolamentos tendem a compensar o efeito da reação da armadura fazendo com que a característica conjugado velocidade volte a ser estável.

A solução da letra “b” do exemplo é direta:

$$b) \ P_e = E \cdot i_a = 243,2 \cdot 82,3 = 20.088 \text{ W}$$

A potência de saída será dada por:

$$P_{out} = P_e - \text{Perdas Rotacionais} - \text{Perdas Suplementares}$$

$$P_{out} = 20.088 - 1300 - 0,01 P_{out}$$

$$P_{out} = 18.600 \text{ W, ou}$$

$$c) \ P_{out} = 18.600 \cdot (1 \text{ HP}/746 \text{ W}) = 24,9 \text{ HP}$$

O conjugado de saída será dado por:

$$\Gamma_{out} = \frac{P_{out}}{\omega} \quad (59)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n \quad (60)$$

$$\omega = 189 \text{ rad/s}$$

$$d) \Gamma_{\text{out}} = 98,19 \text{ Nm}$$

O rendimento pode ser calculado como:

$$\eta = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}$$

$$\text{com: } P_{\text{in}} = V.I = 250 \cdot 84 = 21.000 \text{ W}$$

$$P_{\text{out}} = 18.600$$

Portanto:

$$\eta = 88,6 \%$$

ou, considerando as perdas em cada um dos enrolamentos:

$$\text{Perdas armadura} = r_a i_a^2 = 559,5 \text{ W}$$

$$\text{Perdas campo} = r_F i_F^2 = 340,3 \text{ W}$$

$$\text{Perdas rotacionais} = 1.300 \text{ W}$$

$$\text{Perdas Suplementares} = 1\% P_{\text{out}} = 186 \text{ W}$$

$$\text{Perdas Totais} = 2.385 \text{ W}$$

$$\eta = 1 - \frac{\text{Perdas}}{P_{\text{in}}} \quad (61)$$

$$\eta = 88,6 \%$$

Exemplo 20

A curva de magnetização de um motor CC série de 150 HP, 250 V, e 510 A é dada na Figura 22 (para $n = 900 \text{ rpm}$). A resistência da armadura $r_a = 0,0127 \Omega$, a resistência série do campo é igual a $0,0087 \Omega$. O campo tem 10 espiras e o efeito da reação da armadura é o de produzir uma fmm desmagnetizante equivalente a 250 A-espiras para corrente nominal. Esta reação da armadura varia linearmente com a corrente. Calcular a velocidade, a potência eletromagnética e o conjugado para uma corrente de carga de 510 A (carga nominal) e para metade da carga nominal (255 A).

Solução

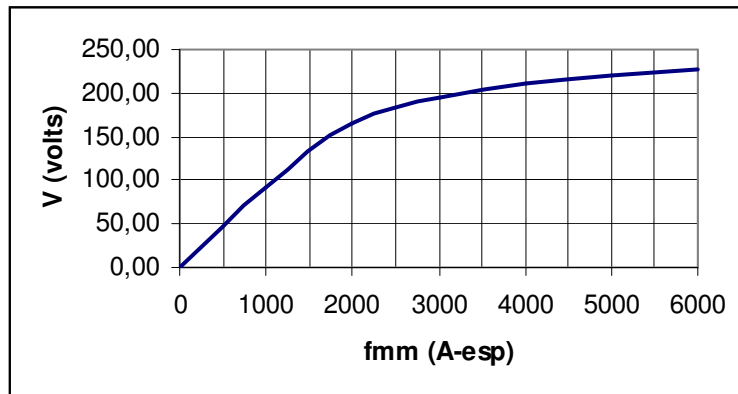


Figura 22: Curva de magnetização ($n = 900$ rpm) da máquina do exemplo 21

A tensão interna é dada por:

$$E = V - (r_a + r_F) I$$

$$E = 250 - (0,0127 + 0,0087) \cdot 510 = 239,08 \text{ V}$$

A fmm produzida pelo enrolamento de campo, descontado o efeito da reação da armadura, é dada por (para o caso de carga nominal $I = 510$ A):

$$f_{mm} = 10 \cdot 510 - 250 \text{ A.espaço} = 4850 \text{ A.espaço}$$

Da curva de magnetização obtém-se: $E_0 = 220$ V.

$$n = \frac{E}{E_0} n_0 = \frac{239,08}{220} 900 = 978 \text{ rpm}$$

A potência eletromagnética nestas condições é dada por:

$$P_e = E \cdot i_a = 239,08 \cdot 510 = 122 \text{ kW}$$

Finalmente, o conjugado será dado por:

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = 102 \text{ rad/s}$$

$$\Gamma = \frac{P_e}{\omega} = 1190 \text{ Nm}$$

Resolvendo para carga média ($I = 255$ A), tem-se:

$$E = 250 - (0,0087 + 0,0127) \cdot 255 = 244,5 \text{ V}$$

$$\text{fmm} = 10 \cdot 255 - 250 \cdot (255/510) = 2425 \text{ A.esp}$$

Da curva de magnetização obtém-se: $E_0 = 180 \text{ V}$

Portanto, a velocidade, a potência e o conjugado serão dados por:

$$n = \frac{E}{E_0} n_0 = \frac{244,5}{180} 900 = 1.222,5 \text{ rpm}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = 128 \text{ rad/s}$$

$$P_e = E \cdot i_a = 244,5 \cdot 255 = 62,3 \text{ kW}$$

$$\Gamma_e = 487 \text{ Nm}$$

Estes dois pontos calculados neste exemplo mostram a grande variação da velocidade com a carga em uma máquina CC série como tinha sido mostrado no item anterior.

Exemplo 21

Usando a mesma curva de magnetização do exemplo anterior, considerar um motor de corrente contínua composto aditivo e com derivação longa com 600 espiras no enrolamento em paralelo e 4 espiras no enrolamento série. Sabendo-se que a tensão nominal deste motor é de 250 V, que a resistência do campo série é de 0,0037 Ω , que a resistência do campo paralelo é de 46,5 Ω e que a resistência de armadura é igual a 0,0127 Ω . Calcular a velocidade deste motor em vazio em carga nominal, para uma corrente de 510 A.

Solução

Um motor em vazio significa sem carga mecânica. Portanto, como o conjugado mecânico é igual ao elétrico em regime permanente, e desprezando as perdas rotacionais, tem-se:

$$\Gamma_e = k\phi_F i_a = 0$$

$$i_a = 0$$

$$I = i_F = \frac{V}{r_F} = \frac{250}{46,5} = 5,38 \text{ A}$$

A força magnetomotriz será então dada por:

$$\text{fmm} = 600 \cdot 5,38 = 3.226 \text{ A.esp}$$

Da curva de magnetização obtém-se:

$$E_0 = 200 \text{ V}$$

A tensão interna em vazio é igual a tensão terminal, então:

$$V = E = 250 \text{ V}$$

$$n = \frac{E}{E_0} n_0 = \frac{250}{200} 900 = 1.125 \text{ rpm}$$

Se a corrente for a nominal ($I = 510 \text{ A}$) tem-se:

$$f_{mm} = 600 \cdot 5,38 + 4 \cdot 504,6 - 250 = 3.226 + 2.018,5 - 250 = 4.994,5 \text{ A.esp}$$

Para esta fmm de acordo com a curva de magnetização tem-se $E_0 = 220 \text{ V}$. Como a tensão interna é dada por:

$$E = V - (r_a + r_F) i_a = 250 - (0,0164) \cdot 504,6 = 241,7 \text{ V}$$

Então:

$$n = \frac{E}{E_0} n_0 = \frac{241,7}{220} 900 = 988,9 \text{ rpm}$$

A potência e o conjugado eletromagnético são dados por:

$$P_e = E \cdot i_a = 121,9 \text{ kW}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{60} n = 103,5 \text{ rad/s}$$

$$\Gamma_e = 1.177,7 \text{ Nm}$$

8) Controle de Velocidade de um Motor de Corrente Contínua

As características de conjugado em função da velocidade vistas no item 6 mostraram que é muito fácil controlar a velocidade de um motor de corrente contínua. De fato, considerando um motor com excitação em separado (ou com excitação em paralelo) e combinando a equação de tensão e do circuito obtém-se:

$$E = k \phi_F \omega \tag{62}$$

$$V = r_a i_a + E \tag{63}$$

e

$$\omega = \frac{V - r_a i_a}{k \phi_F} \quad (64)$$

Analisando a equação 64 observa-se que é possível variar a velocidade variando o fluxo produzido pelo campo, variando o valor da resistência de armadura ou variando a tensão de entrada. Note que a corrente de armadura é resultado do equilíbrio entre o conjugado mecânico e o conjugado elétrico, portanto vai depender da carga.

O controle da velocidade através da variação do fluxo de campo é o mais simples e mais barato. Basta inserir em série com o enrolamento de campo um reostato. Este controle é limitado pela resistência nula do reostato por um lado (corrente máxima de campo) e por um fluxo mínimo (corrente mínima) com o reostato em sua posição de máxima resistência, por outro. A maior velocidade é limitada pelo fluxo mínimo em que a máquina possa operar sem que o efeito da reação da armadura interfira demais no comportamento da máquina.

Os enrolamentos estabilizantes, vistos no exemplo 19, aumentam muito este limite fazendo com que a máquina possa trabalhar com variação da velocidade em uma razão de 1/8.

A variação do fluxo de campo provoca uma variação no conjugado elétrico. O novo ponto de equilíbrio ocorrerá quando o conjugado voltar a igualar o conjugado mecânico.

Exemplo 22

Considere um motor de corrente contínua com excitação em paralelo, operando na região linear da sua curva de magnetização, com as seguintes características:

$$r_a = 1\Omega$$

$$r_F = 100\Omega$$

$$V = 250 \text{ V}$$

$$L_{AF} = 0,5 \text{ H}$$

Este motor opera em regime permanente a uma velocidade constante de 1.700 rpm acionando uma carga mecânica de conjugado constante. Mostre o que ocorre com a velocidade se for colocado em série com o enrolamento de campo um reostato de 100 Ω .

Solução

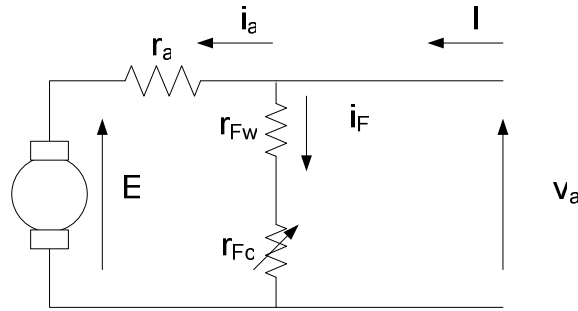


Figura 23: Diagrama do exemplo 22

Na situação inicial, o valor da corrente de campo é igual a 2,5 A. A tensão interna é dada por:

$$E = L_{AF} i_F \omega = 0,5 \times 2,5 \times 178 = 222,5 \text{ V}$$

A corrente de armadura, nesta situação, é igual a:

$$i_a = \frac{V - E}{r_a} = \frac{250 - 222,5}{1} = 27,5 \text{ A}$$

E o conjugado elétrico que é igual ao mecânico é dado por:

$$\Gamma_e = \Gamma_m = L_{AF} i_F i_a = 0,5 \times 2,5 \times 27,5 = 34,37 \text{ Nm}$$

Colocando uma resistência de $100 \, \Omega$ no campo, a corrente de campo e o fluxo ficam reduzidos à metade.

$$i_F = 1,25 \text{ A}$$

O conjugado elétrico reduz, transitoriamente à metade, diminuindo a velocidade da máquina. A redução da velocidade provoca redução na tensão interna e aumento na corrente de armadura. O novo ponto de equilíbrio ocorrerá quando o conjugado elétrico igualar o conjugado mecânico, ou seja, quando a corrente de armadura assumir o seguinte valor:

$$i_a = \frac{\Gamma_e}{L_{AF} i_F} = \frac{34,37}{0,5 \times 1,25} = 55 \text{ A}$$

Neste novo ponto de operação a tensão interna é igual a:

$$E = V - r_a \cdot i_a = 250 - 55 = 195 \text{ V}$$

E a nova velocidade será igual a:

$$\omega = \frac{E}{L_{AF} i_F} = 312 \text{ rad/s}$$

Graficamente a mudança no ponto de operação pode ser vista na Figura 24

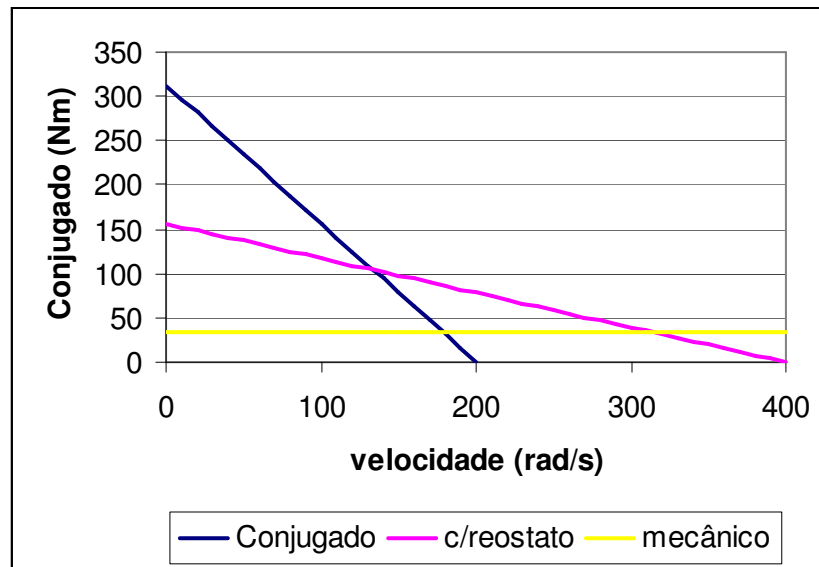


Figura 24: Conjugado versus velocidade para o exemplo 22

Exemplo 23

Repetir o exemplo anterior considerando que o conjugado mecânico varia com o quadrado da velocidade.

Solução

O ponto inicial de funcionamento foi definido anteriormente. O novo ponto será obtido quando o conjugado elétrico for igual ao mecânico para a nova velocidade. De acordo com o enunciado a expressão para o conjugado mecânico é dada por:

$$\Gamma_m = k\omega^2 \quad (65)$$

Então, do primeiro ponto de funcionamento tira-se o valor de k:

$$k = \frac{\Gamma_m}{\omega^2} = \frac{34,37 \text{ Nm}}{(178 \text{ rad/s})^2} = 1,1 \times 10^{-3} \text{ Nms}^2$$

Igualando a equação do conjugado elétrico com a do mecânico obtém-se uma expressão para a corrente de armadura:

$$i_a = \frac{k\omega^2}{L_{AF}i_F} \quad (66)$$

Onde tudo é conhecido. Substituindo na expressão da velocidade (64), obtém-se uma equação do segundo grau em ω , cuja solução é:

$$\omega = 240 \text{ rad/s}$$

A solução gráfica, através de uma planilha onde se equaciona o conjugado elétrico e mecânico em função da velocidade também é direta e está mostrada na Figura 25.

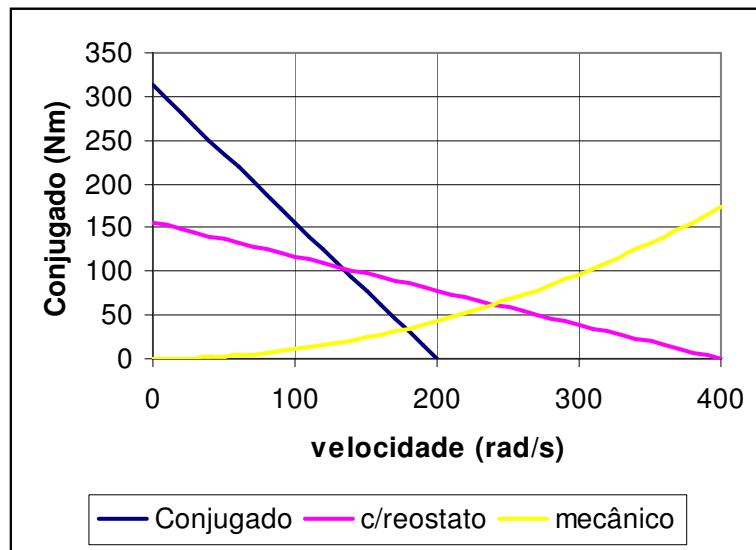


Figura 25: Conjugado x velocidade – Exemplo 23

O controle da velocidade depende do conhecimento da carga.

Outra forma muito simples de se controlar a velocidade de um motor de corrente contínua é através da inclusão de um reostato em série com o enrolamento de armadura.

Exemplo 24

Considere o motor do exemplo 22, naquele ponto de funcionamento descrito. O que ocorre se for instalado um reostato de 5Ω em série com a armadura?

Solução

O ponto de operação foi calculado no exemplo 22:

$$E = 222,5 \text{ V}$$

$$i_a = 27,5 \text{ A}$$

$$\Gamma_e = 34,37 \text{ Nm}$$

Quando o reostato de campo for inserido, não haverá nenhuma alteração no fluxo uma vez que a tensão e a resistência não foram alteradas. No novo ponto de equilíbrio, supondo que o conjugado mecânico permaneça constante, independente da velocidade, ocorrerá para o mesmo valor de conjugado elétrico, portanto, para o mesmo valor de corrente de armadura.

A nova velocidade será dada por:

$$\omega = \frac{V - (r_a + r(\text{ext}))i_a}{L_{AF}i_F} = \frac{250 - 6 \times 27,5}{0,5 \times 1,25} = 68 \text{ rad/s}$$

Observa-se uma grande variação da velocidade. O gráfico da Figura 26 mostra esquematicamente a mudança.

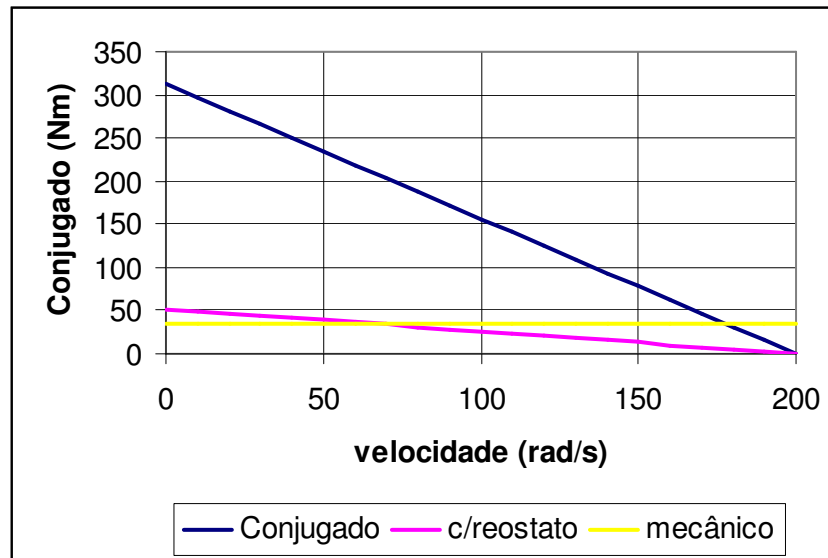


Figura 26: Conjugado x velocidade – Exemplo 24

É fácil observar que a faixa de variação de velocidade com esta forma de controle é muito maior. Não existe, por exemplo, a limitação de fluxo mínimo porque o fluxo permanece constante.

Exemplo 25

Calcular a potência eletromagnética e o rendimento do motor nas duas situações descritas nos exemplos 23 e 24.

Solução

Do exemplo 24, tem-se diretamente:

$$E = 222,5 \text{ V}$$

$$i_a = 27,5 \text{ A}$$

$$P_e = 6,1 \text{ kW}$$

$$i_F = 2,5 \text{ A} \rightarrow I = 30 \text{ A}$$

$$P_{in} = 30 \cdot 250 = 7,5 \text{ kW}$$

$$\eta = 81,75 \%$$

Observe que, como não foram dados as perdas rotacionais ou suplementares, para o cálculo do rendimento supôs-se que a potência eletromagnética fosse igual à potência de saída.

No exemplo 24 tem-se:

$$i_a = 27,5 \text{ A}$$

$$E = 85 \text{ V}$$

$$P_e = 2,3 \text{ kW}$$

$$i_F = 2,5 \text{ A} \rightarrow I = 30 \text{ A}$$

$$P_{in} = 7,5 \text{ kW}$$

$$\eta = 31,17 \%$$

Note que não houve alteração na potência de entrada. O que ocorre com a inclusão do reostato na armadura é a dissipação, na forma de calor, de parte da energia entregue à armadura. Esta forma de controle de velocidade é muito barata na implementação e muito cara (para altas potências) na manutenção, ou seja, em termos de desperdícios energéticos.

Exemplo 26

Considere um motor CC com excitação em série e com os seguintes dados:

$$V = 250 \text{ V};$$

$$r_a = r_F = 1 \text{ } \Omega$$

$$L_{AF} = 0,5 \text{ H}$$

Este motor aciona uma determinada carga cujo conjugado independe da velocidade e, quando alimentado com tensão nominal, desenvolve uma velocidade de 100 rad/s. Calcular o efeito da inserção de um reostato (R) de 10 Ω em série com o circuito de armadura.

Solução

Do exemplo 18, equação 55, fazendo inicialmente $R = 0$, tem-se:

$$i_a = i_F = \frac{V}{r_a + r_F + R + \omega L_{AF}} = 4,8A \quad (67)$$

O conjugado mecânico, nesta situação é igual a:

$$\Gamma_m = \Gamma_e = L_{AF} i_a^2 = 11,52Nm \quad (68)$$

Colocando a resistência do reostato em série o conjugado elétrico vai, transitoriamente, diminuir, desacelerando a máquina e aumentando a corrente de campo e de armadura. O novo ponto de equilíbrio ocorrerá quando o conjugado elétrico voltar a ficar igual ao conjugado mecânico, ou seja, quando:

$$i_a = \sqrt{\frac{\Gamma_e}{L_{AF}}} = 4,8A \quad (69)$$

Ao final do regime transitório a corrente volta ao seu valor anterior uma vez que não houve alteração na carga. A velocidade neste novo ponto de operação será dada por:

$$\omega = \frac{V - (r_a + r_F + R)i_a}{L_{AF} i_a} = 80rad / s \quad (70)$$

Traçando o gráfico do conjugado em função da velocidade para as duas situações ($R = 0$ e $R = 10$) tem-se:

$$\Gamma_e = \frac{L_{AF} V^2}{(r_a + r_F + R + \omega L_{AF})^2} \quad (71)$$

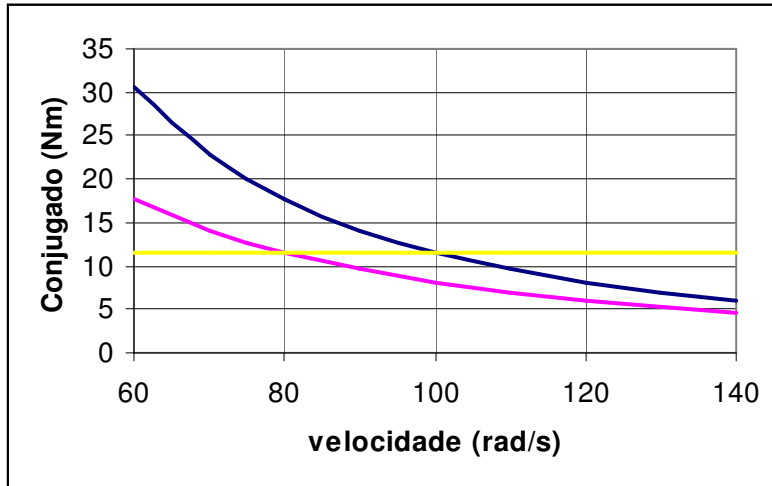


Figura 27: Conjugado x velocidade – Exemplo 26

A terceira forma de controlar a velocidade seria variando a tensão de entrada. Uma fonte CC de tensão controlada pode ser facilmente implementada com a utilização de dispositivos de eletrônica de potência.

Exemplo 27

Com os dados do exemplo 22, determinar o novo ponto de funcionamento do motor supondo que a tensão seja reduzida a sua metade.

Solução

Repetindo o ponto de funcionamento inicial:

$$V = 250 \text{ V};$$

$$E = 222,5 \text{ V};$$

$$i_a = 27,5 \text{ A};$$

$$i_F = 2,5 \text{ A}$$

$$I = 30 \text{ A};$$

$$\Gamma_e = 34,37 \text{ Nm};$$

$$\omega = 178 \text{ rad/s}.$$

A expressão que relaciona o conjugado e a velocidade (53) é repetida para maior clareza:

$$\Gamma_e = \frac{L_{AF} V^2}{r_a r_F} \left\{ 1 - \frac{L_{AF} \omega}{r_F} \right\}$$

Com a nova tensão, tem-se:

$$V = 125 \text{ V};$$

$$i_F = \frac{V}{r_F} = 1,25 \text{ A}$$

$$i_a = \frac{\Gamma_e}{L_{AF} i_F} = \frac{34,37}{0,5 \times 1,25} = 55 \text{ A}$$

$$E = V - r_a i_a = 250 - 1 \cdot 55 = 70 \text{ V}$$

$$\omega = \frac{E}{L_{AF} i_F} = 112 \text{ rad/s}$$

Graficamente, observa-se na Figura 28, que o efeito da mudança da tensão é alterar a inclinação da curva conjugado / velocidade, lembrando que o conjugado varia com o quadrado da tensão.

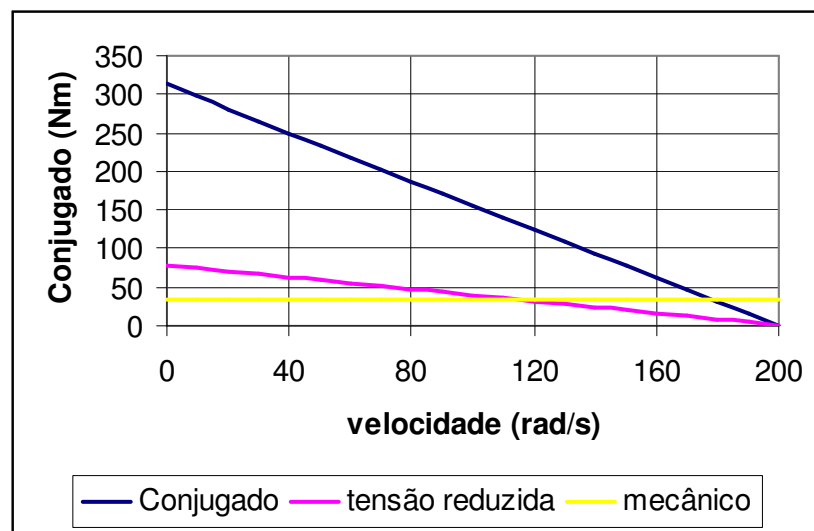


Figura 28: Conjugado x velocidade – Exemplo 27

Exemplo 28

Avaliar o rendimento da máquina nas duas situações descritas no exemplo 27.

Solução

Na situação inicial, o rendimento já foi calculado (Exemplo 25):

$$\eta = 81,75 \%$$

No ponto de operação com tensão reduzida tem-se:

$$P_e = E \cdot i_a = 70 \cdot 55 = 3,85 \text{ kW}$$

$$P_{in} = V \cdot I = 125 \cdot 56,25 = 7,03 \text{ kW}$$

Portanto:

$$\eta = 54,76 \%$$

Houve uma diminuição no rendimento mas não nos mesmos níveis da inserção da resistência no enrolamento de armadura. Este método é, sem dúvida, uma forma mais inteligente de se controlar a velocidade no motor de corrente contínua.

Exemplo 29

Repetir o exemplo 26 (motor CC em série) supondo uma redução de 50% na tensão de entrada.

Solução

O ponto de funcionamento inicial já foi calculado:

$$i_a = i_F = 4,8 \text{ A}$$

$$\omega = 100 \text{ rad/s}$$

$$\Gamma_e = 11,52 \text{ Nm}$$

Se o conjugado permanece constante, a corrente de armadura não pode alterar. Então a nova velocidade é dada por:

$$\omega = \frac{V - (r_a + r_F)i_a}{L_{AF}i_F} = \frac{125 - 2 \times 4,8}{0,5 \times 4,8} = 48 \text{ rad/s}$$

Graficamente, tem-se

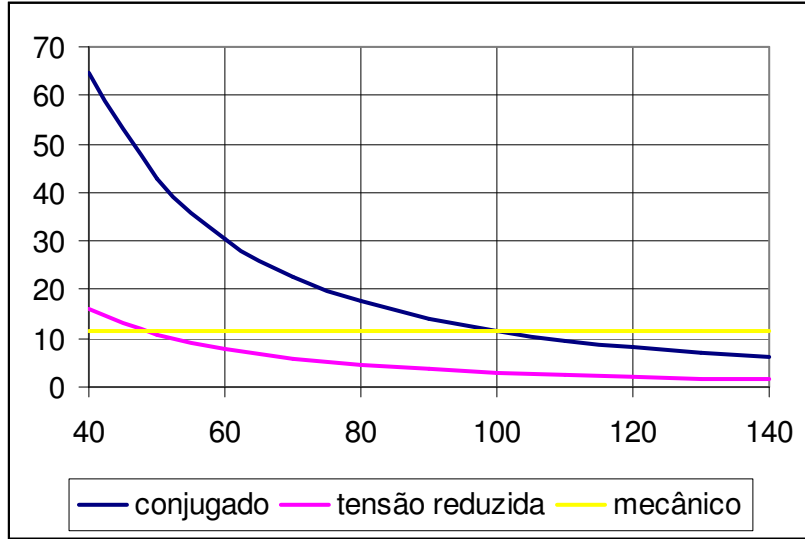


Figura 29: Conjugado x velocidade – Exemplo 29

A velocidade é quase que diretamente proporcional à tensão aplicada. Além disto, com esta forma de controle as perdas não se alteram. Esta é uma forma muito comum de controle de velocidade de motores de tração. O sistema de controle de velocidade dos motores do Metro de Brasília é baseado neste conceito.

9) Dinâmica da Máquina de Corrente Contínua

A análise dinâmica da máquina de corrente contínua consiste em resolver simultaneamente as equações de tensão e a equação mecânica da máquina. Em outras palavras, em resolver as equações 22 e 25. Repetindo estas equações usando o operador “p” para representar o diferencial no tempo, tem-se:

$$v_F = r_F i_F + p L_{FF} i_F \quad (72)$$

$$v_a = r_a i_a + p L_{aa} i_a + \omega L_{AF} i_F \quad (73)$$

$$\Gamma_e - \Gamma_m = p J \omega + B \omega \quad (74)$$

Para determinar o comportamento da máquina, as variáveis de interesse são as correntes e a velocidade, então, podem-se reescrever estas equações da seguinte forma diferencial:

$$i_F = \frac{v_F}{r_F} \left\{ \frac{1}{1 + \tau_F p} \right\} \quad (75)$$

$$i_a = \frac{v_a - L_{AF} i_F \omega}{r_a} \left\{ \frac{1}{1 + \tau_a p} \right\} \quad (76)$$

$$\omega = (\Gamma_e - \Gamma_m) \left\{ \frac{1}{B + J_p} \right\} \quad (77)$$

Onde: $\tau_a = L_{aa}/r_a$, $\tau_F = L_{FF}/r_F$, o conjugado elétrico é uma função das duas correntes e o conjugado mecânico pode ou não ser função da velocidade.

Trata-se de um sistema de equações diferenciais não lineares que pode ser resolvido para qualquer condição de carga através de um processo de integração numérica.

Em várias situações onde a excitação é em separado (ou em paralelo sem variação da tensão de entrada) onde a corrente de campo permanece constante, eliminando assim uma equação e uma não-linearidade do sistema.

9.1) Dinâmica do Controle de Velocidade

Exemplo 30

Simule numericamente o que ocorre com as correntes e com a velocidade com a inclusão do reostato de campo proposto no exemplo 22.

Solução

As três equações descritas por (75), (76) e (77) foram simuladas no Matlab com os seguintes dados complementares:

$$\tau_a = 1,2 \text{ ms}$$

$$\tau_F = 0,5 \text{ s}$$

$$J = 0,1 \text{ Ns}^2$$

$$B = 1 \text{ m Nm/s}$$

A constante de tempo do campo (paralelo) é sempre muito maior que a do enrolamento de armadura uma vez que construtivamente a bobina deste campo tem muitas espiras. As constantes mecânicas foram escolhidas de forma a não alterar significativamente o resultado obtido no exemplo 22, ou seja, foi usado um valor bem baixo de B para não alterar muito o conjugado da carga.

O programa de simulação está mostrado abaixo:

```
function xponto = shunt1(t,x)
global contador
% dinamica do motor shunt
xponto = zeros(3,1);
% parametros
```

```

RTA = [100 200]';
rf = RTA(contador);
talf = 0.5; tala = 0.0012 ; laf = 0.5;
J = 0.1; B = 0.001; ra = 1; va = 250; tl = 34.37;
% equacoes
xponto(1) = ((va/rf)-x(1))/talf;
xponto(2) = (((va-(laf*x(1)*x(3)))/ra)-x(2))/tala;
te = laf*x(1)*x(2);
xponto(3) = (te-tl-B*x(3))/J;
if(t > 1)
    contador = 2;
end;
global contador;
contador = 1;
t0 = 0;
tf = 5.0;
x0 = [2.5 27.5 178]';
[t,x] = ode23('shunt1',t0,tf,x0);
subplot(3,1,1);
plot(t,x(:,1));
subplot(3,1,2);
plot(t,x(:,2));
subplot(3,1,3);
plot(t,x(:,3));

```

A simulação foi feita considerando que o motor estivesse operando em regime permanente até $t = 1$ s e, neste instante, é inserido o reostato de campo. A figura 30 mostra o resultado da simulação.

A simulação mostra a lenta variação na corrente de campo, a rápida variação inicial da corrente de armadura e a lenta acomodação da velocidade do motor (e por consequência da corrente de armadura) em função da constante de tempo mecânica.

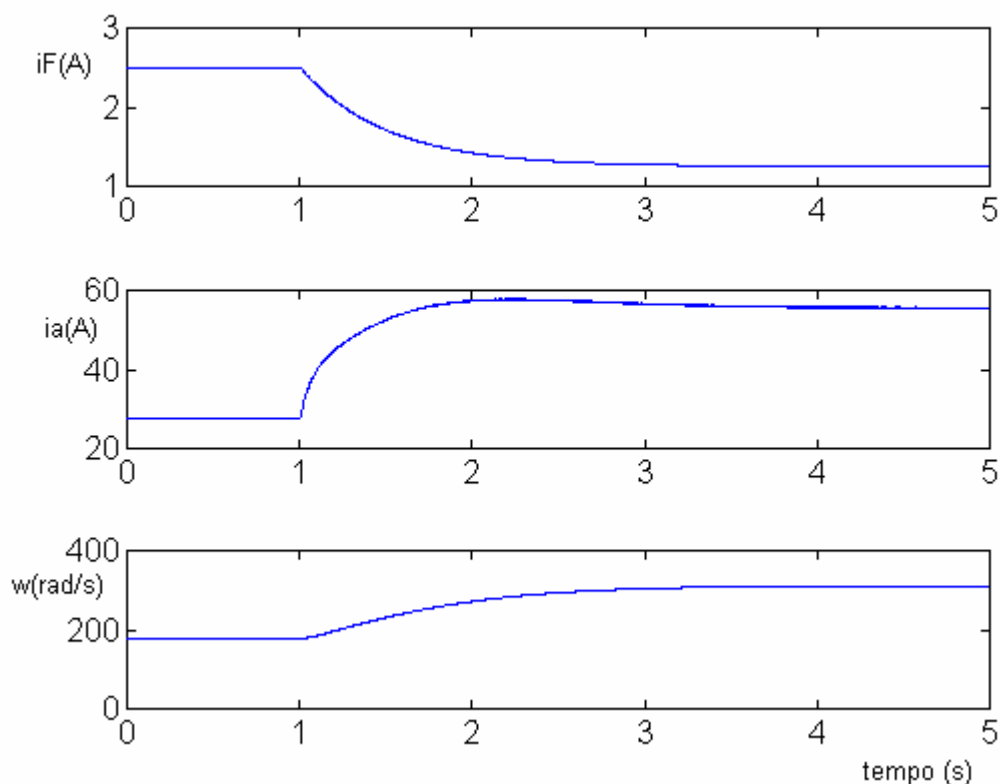


Figura 30: Dinâmica do motor de corrente contínua

Todos os outros exemplos de controle de velocidade podem ser simulados com pequenas mudanças no programa. Estes exemplos são deixados como exercício.

9.2) Partida de um motor de corrente contínua

Como foi visto, o que limita a corrente de armadura é a tensão interna de máquina (E). Quando a máquina está parada o seu valor é nulo e a única limitação é a resistência de armadura que, por motivos de eficiência, tem que ser pequena. A corrente do motor CC pode, então, atingir valores inadmissíveis e, em alguns casos, é necessário um sistema especial para limitar esta corrente.

Existem duas formas simples de limitar a corrente de partida. A primeira é a inserção de resistores em série com a armadura. A outra é o controle da tensão aplicada.

As resistências aplicadas devem ser curto circuitadas em regime permanente para que o rendimento do motor não fique muito prejudicado, assim, um esquema para inserção destes resistores é mostrado na Figura 31 com contatores ligados em paralelo para curto-circuitá-los durante a partida.

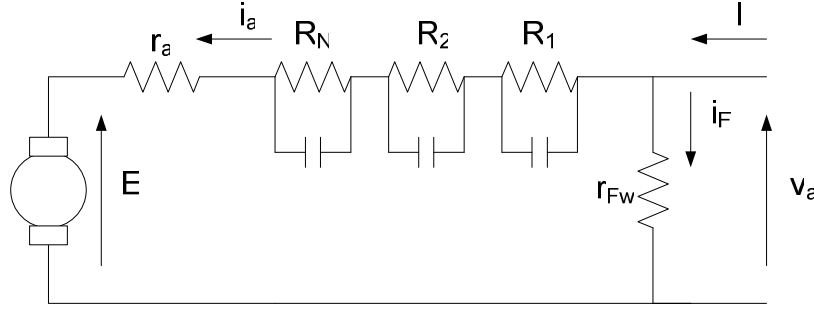


Figura 31: Partida de motor CC com resistores em série com a armadura

Exemplo 31

Determinar qual o número “N” de resistência em série com a armadura de forma a limitar a corrente a corrente de armadura em $I_{\text{máx}}$.

Solução

Este problema, assim como o controle de velocidade do motor, é um problema dinâmico. No entanto, é possível supor que, como as constantes de tempo elétricas são bem menores que as mecânicas, que o sistema atinja um regime permanente antes da retirada de outra resistência, desta forma o problema se torna uma seqüência de regimes permanentes.

Com esta suposição, a corrente de armadura é dada por:

$$i_a = \frac{V - L_{AF}\omega i_F}{r_T} \quad (78)$$

Onde r_T é a resistência total vista pelo enrolamento da armadura. Na partida:

$$R_{T1} = r_a + R_N + \dots + R_2 + R_1$$

Cujo valor tem que ser:

$$R_{T1} = \frac{V}{I_{\text{max}}} \quad (79)$$

Para limitar a corrente no valor estipulado.

O aumento da velocidade implica em redução da corrente. É necessário estipular um valor mínimo para esta corrente, por exemplo, o valor nominal da corrente do motor, para retirar a primeira resistência do circuito. Neste instante:

$$i_a = I_{\text{min}} = \frac{V - L_{AF}\omega i_F}{R_{T1}} \quad (80)$$

Neste instante a resistência R_N é retirada do circuito. O valor desta resistência deve ser calculado de forma que a corrente não ultrapasse o valor máximo estabelecido, então:

$$I_{\max} = \frac{V - L_{AF} \omega i_F}{R_{T2}} \quad (81)$$

onde

$$R_{T2} = r_a + R_{(N-1)} + \dots + R_2 + R_1 \quad (82)$$

Dividindo a equação (81) pela (80) tem-se:

$$I_{\max} = \frac{R_{T1}}{R_{T2}} I_{\min} \quad (83)$$

Repetindo este procedimento “N” vezes, obtém-se:

$$\left(\frac{I_{\max}}{I_{\min}} \right)^N = \frac{R_{T1}}{R_{T2}} \cdot \frac{R_{T2}}{R_{T3}} \dots \frac{R_{TN}}{r_a} \quad (84)$$

Portanto:

$$N = \frac{\ln \frac{R_{T1}}{r_a}}{\ln \frac{I_{\max}}{I_{\min}}} \quad (85)$$

Exemplo 32

Calcular os estágios de partida para a máquina do exemplo 22 supondo que a corrente máxima não possa superar duas vezes a corrente nominal.

Solução

A corrente nominal é de 27,5 A, portanto $I_{\max} = 55$ A. O valor de R_{T1} é dado diretamente a partir de (79):

$$R_{T1} = 250 / 55 = 4,54 \Omega$$

Então:

$$N = \frac{\ln(4,54/1)}{\ln(2)} = 2,18$$

Como “N” tem que ser inteiro e para que a corrente não ultrapasse o valor máximo, escolhe-se $N = 3$. Para este valor de N a corrente máxima será:

$$I_{\max} = I_{\min} \sqrt[3]{\frac{4,54}{1}} = 45,53 \text{ A}$$

Uma vez determinado N e R_{T1} , o valor dos três estágios de resistência pode ser calculado da regra de três definida em (83).

$$R_{T2} = R_{T1} \cdot \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = 2,74 \Omega$$

Portanto:

$$R_1 = R_{T1} - R_{T2} = 1,8 \Omega$$

Da mesma forma:

$$R_{T3} = R_{T2} \cdot \frac{I_{\min}}{I_{\max}} = 1,66 \Omega$$

$$R_2 = R_{T2} - R_{T3} = 1,08 \Omega$$

Como $r_a = 1 \Omega$; $R_3 = 0,66 \Omega$.

Todos os estágios de partida do motor ficam assim definidos.

Exemplo 33

Calcular as correntes de partida e a velocidade do motor de indução do exemplo anterior considerando os três resistores instalados em série com a armadura. Considere que a carga varie linearmente com a velocidade com $B = 0,1$ e que a constante de tempo mecânica (J/B) da máquina seja de 5 segundos.

Solução

Resolver este problema consiste em resolver simultaneamente as equações (75), (76) e (77). Usando um programa semelhante ao mostrado anteriormente e fazendo a resistência de armadura variar entre os valores calculados no exemplo anterior, obtém-se as curvas da Figura 32.

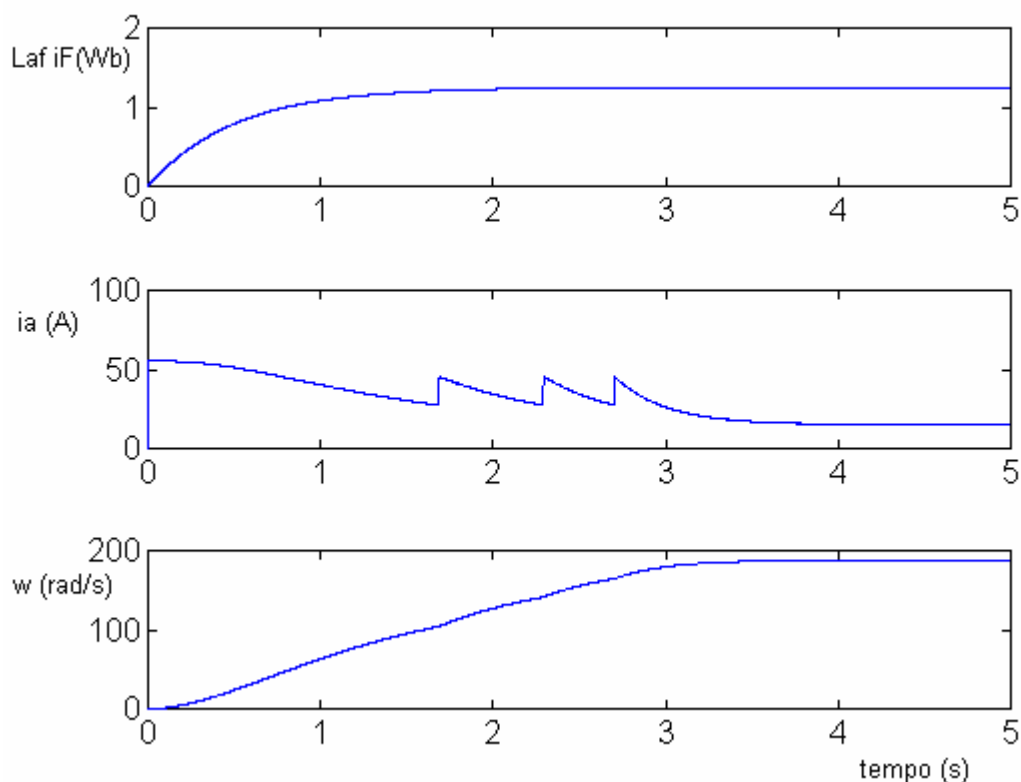


Figura 32: Simulação no tempo da partida de um motor de corrente contínua com excitação em paralelo

10) Referências Bibliográficas

- [1] MATSCH, L. W., MORGAN, J. D., "Electromagnetic and Electromechanical Machines", Harper and Row, NY, 1986.
- [2] FITZGERALD, A. E., KINSLEY, C., KUSKO, A., "Máquinas Elétrica", McGraw Hill, São Paulo, 1979.
- [3] DEL TORO, V., "Fundamentos de Máquinas Elétricas", Prentice Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1994.
- [4] NASAR, S. A., "Electric Machines and Transformers", Macmillan, NY, 1984.
- [5] NASAR, S. A., "Máquinas Elétricas", Coleção Schaum, McGraw-Hill, São Paulo, 1984.
- [6] KRAUSE, P., WASYNCZUK, O., SUDHOFF, S.D., "Analysis of Electric Machinery", IEEE Press, NY, 1995.
- [7] LESENNE, J., NOTELET, F., SÉGUIER, G., "Introduction à l'Electrotechnique Approfondie", Technique et Documentation, Paris, 1981.