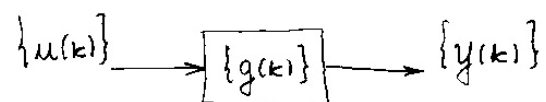


OBS. APLICAÇÃO DA PROPRIEDADE \Rightarrow FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA



• Equação de diferenças

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_m u(k-m)$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\} \quad \text{e} \quad U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\}$$

Aplicando a transformada \mathcal{Z} em ambos os membros da equação de diferenças e pela propriedade da linearidade:

$$\begin{aligned}
 & \overset{\mathcal{Z}}{\downarrow} \mathcal{Z}\{y(k)\} + a_1 \overset{\mathcal{Z}}{\downarrow} \{y(k-1)\} + \dots + a_n \overset{\mathcal{Z}}{\downarrow} \{y(k-n)\} = \\
 & b_0 \overset{\mathcal{Z}}{\downarrow} \{u(k)\} + b_1 \overset{\mathcal{Z}}{\downarrow} \{u(k-1)\} + \dots + b_m \overset{\mathcal{Z}}{\downarrow} \{u(k-m)\} \\
 \Rightarrow & Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \dots + b_m z^{-m} U(z) \\
 & Y(z) [1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}] = U(z) [b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}] \\
 & \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} z^{n-m} \\
 & \nearrow \text{FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DISCRETA, } G(z)
 \end{aligned}$$

c) TRANSFORMADA DO SOMATÓRIO DE CONVOLUÇÃO

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} g(k-j)u(j) \iff Y(z) = G(z) \cdot U(z) \quad \left(\begin{array}{l} \text{incluindo o} \\ \text{caso não causal} \end{array} \right)$$

Demonstração:

$$y(k) = g(k)u(0) + g(k-1)u(1) + g(k-2)u(2) + \dots$$

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} [g(k)u(0) + g(k-1)u(1) + g(k-2)u(2) + \dots] z^{-k}$$

$$Y(z) = u(0) \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} + u(1) \sum_{k=0}^{\infty} g(k-1)z^{-k} + u(2) \sum_{k=0}^{\infty} g(k-2)z^{-k} + \dots$$

$$= u(0)G(z) + u(1)z^{-1}G(z) + u(2)z^{-2}G(z) + \dots$$

$$= G(z) [u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots] = G(z) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}}_{U(z)}$$

$$Y(z) = G(z) \cdot U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \mathcal{Z}\{g(kT)\} \Rightarrow \text{FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DISCRETA.}$$

$$\text{DE FORMA GERAL: } \mathcal{Z}\{f_1(k) * f_2(k)\} = F_1(z) \cdot F_2(z)$$