

SIMULAÇÃO DO KIT MS 150 FEEDBACK

INTRODUÇÃO

A simulação de sistemas práticos é atualmente uma técnica já bastante conhecida e utilizada em projetos e desenvolvimento de novos sistemas. Através da simulação, pode-se fazer testes em sistemas ainda não foram construídos ou rapidamente testar a reação a certas modificações que talvez levassem muitos dias para serem implementadas no sistema real.

Este texto pretende ser um exemplo didático de modelagem e simulação de sistemas de controle práticos. De maneira a demonstrar a eficiência e o nível de precisão conseguida pela simulação, o sistema a ser submetido a este processo é o kit MS 150 utilizado no laboratório de Controle. Desta forma será possível não apenas comparar os resultados práticos com a simulação, mas também mostrar como proceder para medir os vários parâmetros do sistema prático.

De forma a conseguir uma boa fidelidade entre a simulação e o desempenho do sistema, serão introduzidas na modelagem, além da representação do motor C.C. com três variáveis de estado, uma série de não linearidades que influenciam bastante o funcionamento do sistema.

A simulação do sistema será feita componente a componente e para cada um deverá ser criado um bloco no SIMULINK com entradas e saídas que reproduzem o componente original. Posteriormente, os blocos representativos dos diversos componentes poderão ser interligados, para formar os sistemas de controle de velocidade, de posição, etc...

MODELAGEM DOS COMPONENTES

AU 150 - Unidade Atenuadora

É uma unidade com dois potenciômetros atenuadores independentes graduados de 0 a 10 (Fig.1).

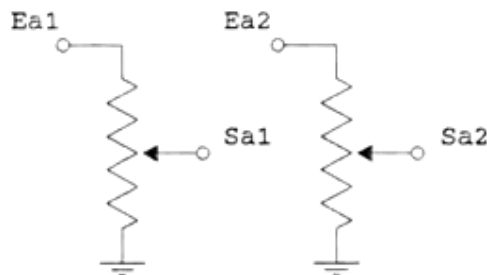


Fig.1 - Diagrama esquemático das unidades atenuadoras.

No programa de simulação, cada potenciômetro deve ser tratado separadamente e sempre desprezando as impedâncias dos componentes ligados na entrada do atenuador, enquanto são consideradas infinitas as impedâncias dos componentes ligados na saída dos mesmos. Isto é, os atenuadores são considerados ideais.

PA 150 - Pré-Amplificador

É um amplificador eletrônico com duas entradas e duas saídas, uma com ganho positivo e outra com ganho negativo (Fig. 2).

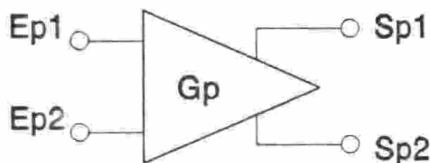


Fig. 2 - Diagrama Esquemático do Pré-Amplificador.

No programa de simulação, este será tratado como um amplificador com duas entradas que se somam e duas saídas complementares. O ganho na região ativa é considerado constante, podendo ser ajustado pelo usuário. As saturações positivas e negativas das saídas também podem ser ajustadas pelo usuário no bloco correspondente do SIMULINK.

OA 150 - Amplificador Operacional

É um amplificador eletrônico com três entradas externas ligadas por resistores à entrada de um amplificador de alto ganho negativo. Possui uma chave seletora possibilitando escolher entre 3 tipos de realimentação: Resistor, Resistor + Capacitor e Realimentação Externa (Fig. 3).

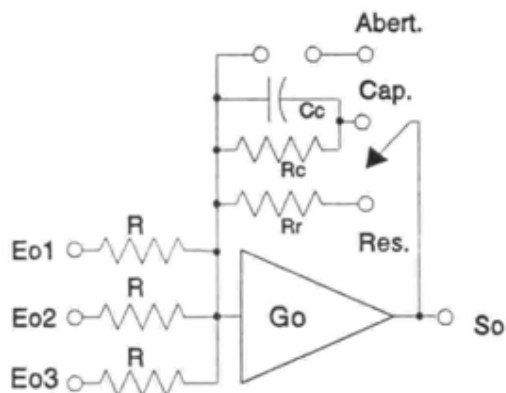


Fig. 3 - Diagrama Esquemático do Amplificador Operacional.

No programa de simulação, este será tratado como um amplificador com três entradas que se somam e uma saída. O ganho na

região ativa do caminho direto é considerado constante e ajustável, da mesma maneira que as saturações positivas e negativas. No programa este componente pode ser simulado com os três tipos de realimentação disponíveis: realimentação por resistor (Res.), realimentação com resistor e capacitor (Cap.) e realimentação externa (Abert.). Para a representação no SIMULINK recomenda-se a criação de 3 blocos, cada um representando um tipo de realimentação e no caso da realimentação externa, os componentes externos devem estar incluídos através do cálculo das funções de transferência $So/Eo1$, $So/Eo2$, $So/Eo3$.

SA 150 - Servo-Amplificador

É o amplificador de potência que fornece a excitação necessária para o funcionamento do motor. Possui duas entradas equivalentes, cada uma produzindo torque no motor em um sentido. As entradas do Servo só funcionam com tensões positivas conforme a representação esquemática da Fig.4.

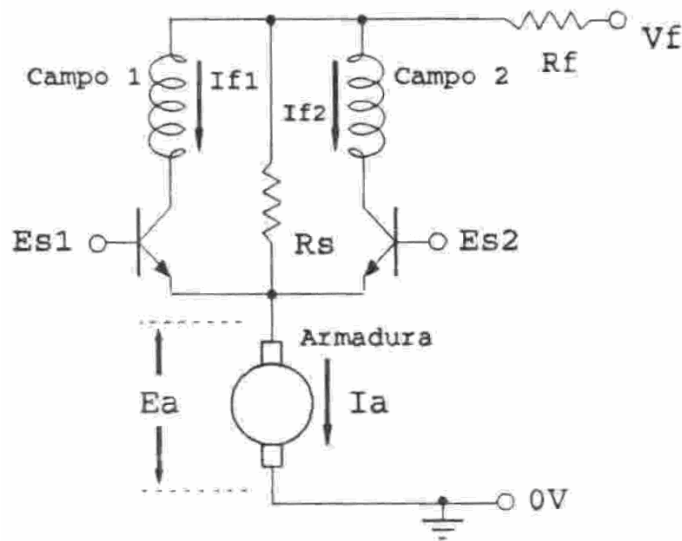


Fig. 4 Diagrama esquemático do Servo-Amplificador.

Existem, de fato, 2 transistores em cascata em cada uma das entradas do Servo, causando uma queda de cerca de 1,3V entre a tensão na entrada e a tensão aplicada na armadura do motor na conexão por armadura $Ea(t)$. Existe também um limitador de corrente ajustado em cerca de 2A com a ação retardada em alguns milissegundos por um capacitor interno.

Para o nosso objetivo bastará a implementação da conexão por armadura do Servo. A queda de tensão entre a entrada mais positiva e a armadura do motor é considerada constante e igual a 1,3V, desde que o limitador de corrente não esteja agindo.

A ação do limitador de corrente é reproduzida com os tempos de atraso e um limite absoluto ($I_{amax2} = 2,7A$). O limitador de corrente permite que a corrente fique acima de I_{amax1} (2A) durante um tempo limitado (cerca de 0,5 seg.). Passado este tempo a corrente é

limitada em I_{amax1} .

Os valores de I_{amax1} e I_{amax2} poderiam ser ajustados no bloco SIMULINK, mas como uma primeira aproximação, pode-se considerar que apenas o primeiro limite ($I_{amax2} = 2,7A$) está agindo diretamente sobre a corrente $I_a(t)$.

Motor

O motor DC do kit MS 150, não é um motor de campo constante como a maior parte dos motores DC de pequena potência. Em vez disso, existem 2 enrolamentos de campo para produzir campos de sentidos opostos, o que permite inverter o sentido do torque sobre o rotor.

Este componente foi modelado a partir do seguinte sistema de equações de estado (Apêndice 1):

$$\frac{dI_a(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a}I_a(t) - \frac{K_b}{L_a}W_m(t) + \frac{1}{L_a}E_a(t) \quad (1)$$

$$\frac{dW_m(t)}{dt} = \frac{K_i}{J_m}I_a(t) - \frac{B_m}{J_m}W_m(t) - \frac{1}{J_m}T_l \quad (2)$$

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = W_m(t) \quad (3)$$

Nas equações (1), (2) e (3) acima, $I_a(t)$, $W_m(t)$ e $\theta(t)$ são variáveis de estado e $E_a(t)$ e T_l são entradas.

Na modelagem original do Apêndice 1, K_b e K_i nas equações (1) e (2) são constantes, pois o motor considerado tem campo constante e o sistema de equações de estado resultante é linear. No caso do kit MS 150, a corrente de campo varia e com ela varia o campo magnético produzido no estator da máquina, o que causa a variação das constantes K_b e K_i .

A corrente de campo não é igual à corrente de armadura, mas pode ser determinada a partir desta, da tensão de armadura, da tensão da fonte e de um resistor interno do servo amplificador. No caso do kit MS 150 com ligação por armadura, tem-se pela Fig. 4, considerando que apenas uma das entradas possui tensão positiva:

$$I_f(t) = I_a(t) \left(1 + \frac{R_f}{R_s} \right) - \frac{V_f - E_a(t)}{R_s} \quad (4)$$

onde $I_f(t) = I_{f1}(t)$ se E_{s1} estiver mais positivo, ou $I_f(t) = I_{f2}(t)$ se E_{s2} estiver mais positivo.

Teoricamente, K_b e K_i devem variar linearmente com a intensidade do campo magnético do estator (Slemon, 1975), que por sua vez deve variar, linearmente ou não (depende do material magnético), com a corrente de campo $I_f(t)$.

Os testes práticos com o motor do kit MS 150 mostraram que K_b e K_i variam linearmente com $I_f(t)$ até certo valor desta última (cerca de 1,25 A) e permanecem constantes a partir deste ponto. Isto pode ser explicado pela saturação do material magnético do motor. Existem, portanto, duas situações a serem consideradas:

1) Se $I_f(t)$ está abaixo do valor limite:

$$K_b = K_{blin} \cdot I_f(t) \quad (5)$$

$$K_i = K_{ilin} \cdot I_f(t) \quad (6)$$

2) Se $I_f(t)$ está igual ou acima do valor limite:

$$K_b = K_{bmax} = K_{blin} \cdot I_{fsat} = \text{constante} \quad (7)$$

$$K_i = K_{imax} = K_{ilin} \cdot I_{fsat} = \text{constante} \quad (8)$$

Entretanto, para trabalhar com modelos lineares, consideraremos K_b e K_i como constantes mesmo com $I_f(t)$ abaixo do valor limite.

Fonte de alimentação

Fornece as tensões necessárias para a alimentação do motor e dos amplificadores. Em uma representação simplificada, apenas o motor é capaz de fazer a tensão da fonte cair abaixo do valor nominal, portanto, para o motor existe a tensão da fonte (V_f) e impedância resistiva (R_f). Também existem as fontes de alimentação dos amplificadores e transdutores do kit, que são responsáveis pelas saturações destes componentes. Os valores de saturação devem ser medidos em cada componente separadamente.

Tacômetro

No programa este é considerado perfeito, isto é, absolutamente linear (K_g fornecido pelo usuário) e sem ruído.

OP 150 - Potenciômetro de Saída

No programa este é considerado perfeito, isto é, absolutamente linear, variando entre o positivo e negativo da fonte de alimentação, segundo o ângulo do eixo reduzido (0 grau corresponde a 0V). Existem ângulos de saturação que uma vez atingidos a tensão na saída atinge um máximo ou um mínimo. São desprezados efeitos de folga de engrenagens entre o eixo direto e reduzido do motor.

MEDIDAS DE CONSTANTES DO KIT

De maneira a conseguir a melhor aproximação possível entre os resultados da simulação e os resultados obtidos em laboratório, é essencial que os parâmetros de um kit em particular sejam medidos e colocados no arquivo de dados do programa. Este procedimento também facilita o entendimento da modelagem utilizada.

PA 150 - Pré-Amplificador

Deve-se medir o ganho deste amplificador de tal forma a se obter uma média, pois a curva de entrada versus saída pode não ser perfeitamente reta, ocasionando medidas de ganho diferentes para sinais de pequena amplitude e níveis C.C. diferentes. Para se obter um ganho médio, com o auxílio do osciloscópio, deve-se aplicar uma sinal senoidal de baixa frequência (inferior a 20 Hz) e com amplitude grande o suficiente e níveis C.C. tais que uma das saídas do amplificador excursionsse bem próximo da saturação positiva ou negativa sem atingi-las. O quociente entre as amplitudes pico a pico do sinal de saída pelo de entrada fornecerá o ganho.

As saturações poderão ser medidas com o voltímetro C.C. ligado na saída do amplificador enquanto um outro sinal C.C. de amplitude relativamente grande (positivo ou negativo) é aplicado em uma das entradas.

Ganho (Gp) =_____:

Sat.positiva(Sto_p)=_____: Sat.negativa(Sto_n)= _____:

OA 150 - Amplificador Operacional

Para se obter um resultado preciso com um ensaio simples, pode-se selecionar a realimentação com o resistor de 100 K Ω , a entrada em um dos bornes ligados a resistores de 100 K Ω e proceder como descrito acima para o Pré-Amplificador. Para obter o ganho, deve-se dividir a amplitude pp (pico a pico) da saída pela amplitude pp do sinal na entrada do amplificador, que é acessível pelo borne de realimentação externa.

As saturações são medidas da maneira descrita acima para o Pré-Amplificador.

Ganho sem realimentação(Go) =_____:

Sat. positiva(Sto_p) =_____: Sat. negativa(Sto_n) =_____:

Resistores de entrada(R) = 100 K Ω

Resistor de realimentação(Rr) = 100 K Ω

Resistor em paralelo com o capacitor (Rc) = 100 K Ω

Capacitor(Cc) = 1 μ F

SA 150

Vf=_____: Rs = 62

Iamax1=_____: Iamax2=_____:

Tacômetro

Medição com estroboscópio e voltímetro.

Kg = _____:

OP 150

Medição pela escala e voltímetro. Deve-se calibrar antes o potenciômetro, isto é, para 0 graus deve corresponder 0 volts na saída.

Vps1=_____:

Vps2=_____:

Aps1=_____:

Aps2=_____:

MEDIÇÃO DAS CONSTANTES DO MOTOR

Kb [V.s/rad] e Ra [ohms]

Supondo-se que o motor está em regime estacionário, faz-se $dI_a(t)/dt$ nulo na equação (1) e com a ajuda de (5), escreve-se:

$$E_a = R_a I_a + K_b W_m \quad (12)$$

Portanto, medindo-se a tensão E_a , a corrente I_a , a velocidade W_m em 5 pontos diferentes, pode-se calcular K_b e R_a por uma interpolação através do método dos mínimos quadrados (Apêndice 2). Preencha a tabela abaixo com valores medidos em seu kit. E_a em Volts, I_a em Amperes, W_m em rad/s e calcule I_f pela equação (4). Faça as medidas com o potenciômetro de saída conectado ao motor.

E_a (V)	I_a (A)	I_f (A)	W_m (rad/s)
5			
7			
9			
11			
13			

Ki [N.m/A]

Em regime estacionário, certamente a potência mecânica desenvolvida pelo motor será igual à potência elétrica consumida pela

armadura. Portanto, observando o esquema da Fig A.1.1 juntamente com as equações do Apêndice 1, pode-se afirmar:

$$T_m.W_m = E_b.I_a \quad (13)$$

$$K_i.I_a.W_m = K_b.W_m.I_a \quad (14)$$

$$K_i = K_b \quad (15)$$

T_l [N.m] e B_m [N.m.s/rad]

Da equação (2) em regime estacionário, tira-se:

$$T_l = K_i.I_a - B_m.W_m \quad (16)$$

Sabe-se que T_l , no caso do motor do kit, é causado principalmente pelo atrito seco das escovas de carvão com o anel coletor de corrente do rotor (atrito Coulomb) sendo, portanto, constante. A mesma tabela acima utilizada para calcular K_b e R_a , pode ser usada juntamente com a equação (16) para calcular T_l e B_m utilizando interpolação pelo método dos mínimos quadrados (Apêndice 2)

Interpolação
por mínimos
quadrados

Interpolação
por mínimos
quadrados

K_b =_____:

K_i =_____:

T_l =_____:

R_a =_____:

K_g =_____:

B_m =_____:

J_m [kg.m²]

Da equação (2) com $I_a(t)$ igual a zero, tira-se

$$J_m \frac{dW_m(t)}{dt} = -T_l - B_m.W_m(t) \quad (17)$$

Fazer $I_a(t)$ igual a zero, significa cortar a corrente de alimentação na armadura do motor. Pode-se fazer este ensaio cronometrando o tempo de queda da velocidade do motor, pois o plotador não é confiável para sinais de variação rápida. Depois de polarizar o motor a uma velocidade constante, solta-se um dos fios do Servo por onde passa a corrente de armadura, enquanto uma outra pessoa cronometra o tempo gasto desde este instante até a parada completa (tq). Resolvendo a equação diferencial (17), obtém-se:

$$W_m(t) = (W_m(0) + \frac{T_l}{B_m})e^{-\frac{B_m}{J_m}t} - \frac{T_l}{B_m} \quad (18)$$

Fazendo $t = tq$ e $Wm(t) = 0$ na equação (18) e isolando Jm , obtém-se:

$$Jm = \frac{tq.Bm}{\ln(Wm(0). \frac{Bm}{Tl} + 1)} \quad (19)$$

La [H]

Utilizando uma década de indutâncias e um gerador senoidal ou um outro instrumento apropriado, a indutância de armadura pode ser medida facilmente.

$La =$ _____:

O Modelo SIMULINK desenvolvido permitirá simular qualquer montagem do kit e mostrar o gráfico da variação de qualquer das saídas dos componentes e ainda da velocidade do motor, ângulo do eixo reduzido, corrente de armadura e de campo do motor. Todas as informações referentes ao kit, como os valores de cada parâmetro, poderão estar nos blocos representativos de cada componente ou em um arquivo de dados lido pelo MATLAB antes da execução da simulação. Abaixo, mostra-se algumas linhas de um arquivo de dados de uma antiga versão XXDOS do programa de simulação. Os valores contidos neste arquivo são reais, correspondendo a medidas feitas em um KIT MS-150 em 1991 e podem ser usados como referência ou testes dos Blocos SIMULINK desenvolvidos.

```
*
* 9  Constantes do Motor
*      Kblin Ra Kilin Tl Bm Jm Kg La Ifsat
*      .02 2.6 .02 .0092 3E-6 3E-5 885 1E-2 1.25
*
* Parametros do Pre-Amplificador
* 10 Stp_p Stp_n Gp
*      13.5 -0.5 25
*
* Parametros do Amplificador Operacional
* 11 Sto_p Sto_n Go R Rr Rc Cc Zo
*      11.58 -14.77 -6300 1E5 1E5 1E5 1E-6 1E6
*
* Limitador do Servo, Potenciometro, Fonte e R. serie
* 12 Iamax1 Iamax2 Vps1 Vps2 Aps1 Aps2 Vf Rf Rs
*      2.7 2 15.27 -15.27 150 -150 29 2 62
```

GLOSSÁRIO DE SÍMBOLOS

$Ia, Ia(t)$ - Corrente no enrolamento de armadura do motor do kit. Algumas vezes considerada função do tempo, outras vezes constante. Unidade [A].

$Ea, Ea(t)$ - tensão sobre o enrolamento de armadura do motor do kit. Algumas vezes considerada função do tempo, outras vezes constante. Unidade [V].

W_m , $W_m(t)$ - velocidade mecânica do eixo direto do motor do kit. Algumas vezes considerada função do tempo, outras vezes constante. Unidade [rad/s].
 T_l - torque de carga no eixo do motor. Como não existem cargas, este é considerado como o torque de atrito estático devido a mancais e escovas. Considerado constante. Unidade [N.m].
 $\theta(t)$ - ângulo do eixo direto do motor. Considerado função do tempo. Unidade [rad].
 R_a - resistência do enrolamento de armadura. Unidade [ohm].
 L_a - indutância do enrolamento de armadura. Unidade [H].
 K_g - constante do tacômetro. Unidade [rpm/V].
 K_b - constante de força contra-eletromotriz. Unidade [V.s/rad].
 K_i - constante de torque magnético. Unidade [N.m/A].
 K_{blin} - constante de proporcionalidade entre a constante de força contra-eletromotriz e a corrente de campo. Unidade [V.s/rad.A].
 K_{ilin} - constante de proporcionalidade entre a constante de torque magnético e a corrente de campo. Unidade [N.m/A²]. K_{bmax} - máximo valor de K_b . Unidade [V.s/rad].
 K_{imax} - máximo valor de K_i . Unidade [N.m/A].
 I_{fsat} - valor de $I_f(t)$ a partir do qual K_b e K_i ficam constantes.
 B_m - coeficiente de atrito viscoso. Unidade [N.m.s/rad].
 J_m - inércia do rotor do motor. Unidade [kg.m²].
 I_f , $I_f(t)$ - Corrente em um dos enrolamentos de campo do motor do kit. Algumas vezes considerada função do tempo, outras vezes constante. Unidade [A].
 $I_{f1}(t)$, $I_{f2}(t)$ - Correntes de campo nos enrolamentos 1 e 2 do motor.
 V_f - tensão da fonte de alimentação para o Servo-Amplificador (típico 29V).
 R_f - resistência equivalente da fonte (típico 2 ohms).
 R_s - resistência interna do Servo-Amplificador ligada em paralelo com os enrolamentos de campo do motor (típico 62 ohms).
 I_{amax1} - Limite de corrente aceito pelo motor depois de um determinado atraso imposto pelo limitador. (típico 2A)
 I_{amax2} - Limite de corrente absoluto aceito pelo motor. (típico 2,7A)
 T_m - torque magnético desenvolvido pelo motor. Unidade [N.m].
 E_b - força contra-eletromotriz no enrolamento de armadura do motor. Unidade [V].
 t_q - tempo de queda de velocidade desde W_{m0} até zero sem torque magnético. Unidade [s].
 W_{ino} - velocidade inicial no ensaio de queda de velocidade. Unidade [rad/s].
 B_{mf} - coeficiente de atrito viscoso do freio magnético. Unidade [N.m.s/rad].

BIBLIOGRAFIA

- [1] Sistemas de Controle Automático BENJAMIN C. KUO. Quarta Edição - Prentice/Hall do Brasil, 1987.
- [2] Power System Control and Stability PAUL M. ANDERSON e ABDEL A. FOUAD, First Edition - The Iowa State University Press, Ames, Iowa USA, 1977.
- [3] Equipamentos Magnetelétricos 2, GORDON R. SLEMON, Livros Técnicos e Científicos Editora S/A, 1975.
- [4] Modular Servo Type MS 150 - Manual, Feedback Ltd. Crowborough, Sussex England.

Apêndice 1

MODELAGEM DE MOTORES C.C.

Os motores de corrente contínua são utilizados extensivamente em sistemas de controle, o que justifica o desenvolvimento de um modelo matemático baseado na teoria de sistemas lineares para descrever o seu funcionamento. A modelagem a seguir (Kuo, 1987), pressupõe que a corrente de campo $i_f(t)$ pode ser considerada constante, o que não é o caso do kit MS 150, onde a corrente de campo varia constantemente. Porém, posteriormente a análise será estendida para este caso.

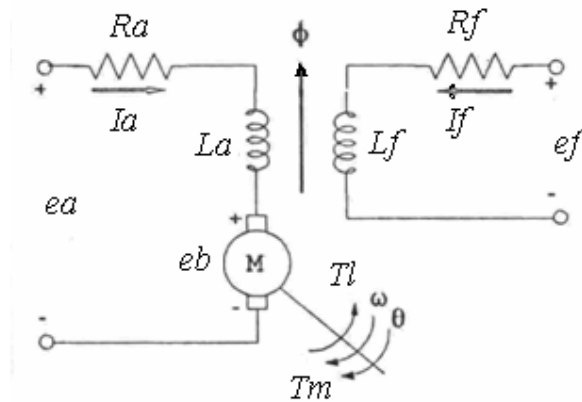


Fig. A.1.1 - Diagrama esquemático de um motor DC com excitação independente.

Na Fig. A.1.1, temos o diagrama esquemático de um motor C.C. com excitação independente. A excitação do motor vem da tensão de entrada ea , aplicada no enrolamento de armadura (normalmente no rotor da máquina), através da resistência Ra , indutância La e uma tensão eb que representa a força contra eletromotriz devido à rotação do motor. O enrolamento de campo (normalmente no estator da máquina) possui resistência Rf e indutância Lf . O fluxo magnético no entreferro é chamado de Φ . Sejam os seguintes as variáveis e parâmetros utilizados:

- $ea(t)$ = tensão de armadura
- $ef(t)$ = tensão de campo
- Ra = resistência de armadura
- $eb(t)$ = força contra-eletromotriz (fcem)
- Rf = resistência de campo
- La = indutância de armadura
- Lf = indutância de campo
- $ia(t)$ = corrente de armadura
- $if(t)$ = corrente de campo
- Ki = constante de torque
- Kb = constante de fcem

$\Phi(t)$ = fluxo magnético
 $Tm(t)$ = Torque desenvolvido pelo motor
 Jm = inércia do rotor
 Bm = coeficiente de atrito viscoso
 $\theta m(t)$ = deslocamento angular do rotor
 $Wm(t)$ = velocidade angular do rotor
 $Tl(t)$ = torque de carga

A análise linear também supõe que o fluxo no entreferro é proporcional à corrente de campo:

$$\Phi(t) = K_f I_f(t) = K_f I_f = \text{constante} \quad (\text{A.1.1})$$

O torque desenvolvido pelo motor é proporcional ao fluxo no entreferro e à corrente de armadura.

$$Tm(t) = K_m \Phi(t) I_a(t) = K_m K_f I_f I_a(t) \quad (\text{A.1.2})$$

Já que $K_m K_f I_f$ é constante, definimos a constante de torque K_i de tal forma que:

$$Tm(t) = K_i I_a(t) \quad (\text{A.1.3})$$

As equações diferenciais que descrevem o funcionamento do sistema a partir da tensão de entrada $ea(t)$ são:

$$\frac{dI_a(t)}{dt} = \frac{1}{L_a} ea(t) - \frac{R_a}{L_a} I_a(t) - \frac{1}{L_a} eb(t) \quad (\text{A.1.4})$$

$$\frac{dWm(t)}{dt} = \frac{1}{Jm} Tm(t) - \frac{1}{Jm} Tl(t) - \frac{Bm}{Jm} Wm(t) \quad (\text{A.1.5})$$

$$Tm(t) = K_i I_a(t) \quad (\text{A.1.6})$$

$$eb(t) = K_b Wm(t) \quad (\text{A.1.7})$$

O torque de carga $Tl(t)$ é considerado como a outra entrada do sistema e pode ser, como no caso do kit MS 150, um torque de atrito estático como um atrito de Coulomb. Desta forma, a tensão de armadura $ea(t)$ será a causa das alterações nas variáveis do motor. As variáveis de estado podem ser definidas como $I_a(t)$, $\theta m(t)$ e $Wm(t)$. Rearranjando as equações acima, pode-se colocar o sistema de equações de estado na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \frac{dIa(t)}{dt} \\ \frac{dWm(t)}{dt} \\ \frac{d\theta m(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Ra}{La} & -\frac{Kb}{La} & 0 \\ \frac{Ki}{Jm} & -\frac{Bm}{Jm} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ia(t) \\ Wm(t) \\ \theta m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{La} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{Jm} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ea(t) \\ Tl(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.8})$$

A modelagem é linear, pois todos os parâmetros são invariantes com o tempo.

Apêndice 2

INTERPOLAÇÃO POR MÍNIMOS QUADRADOS

A álgebra matricial fornece um método rápido e prático para o cálculo da interpolação por mínimos quadrados a partir da equação algébrica original e expandindo para uma equação matricial. Seja, por exemplo, A equação (12) utilizada para a determinação de *Ra* e *Kb*lin .

$$Ea= Ra\ la+ Kb\ Wm \tag{A.2.1}$$

Suponhamos que foram obtidos em laboratório os seguintes pontos:

<i>Ea</i>	<i>Ia</i>	<i>Wm</i>
<i>Ea₁</i>	<i>Ia₁</i>	<i>Wm₁</i>
<i>Ea₂</i>	<i>Ia₂</i>	<i>Wm₂</i>
<i>Ea₃</i>	<i>Ia₃</i>	<i>Wm₃</i>
<i>Ea₄</i>	<i>Ia₄</i>	<i>Wm₄</i>
<i>Ea₅</i>	<i>Ia₅</i>	<i>Wm₅</i>

Tomando os dados da tabela acima na equação (A.2.1), teremos a seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} Ea_1 \\ Ea_2 \\ Ea_3 \\ Ea_4 \\ Ea_5 \end{bmatrix} = Ra \begin{bmatrix} Ia_1 \\ Ia_2 \\ Ia_3 \\ Ia_4 \\ Ia_5 \end{bmatrix} + Kb \begin{bmatrix} Wm_1 \\ Wm_2 \\ Wm_3 \\ Wm_4 \\ Wm_5 \end{bmatrix} \tag{A.2.2}$$

Ou, reagrupando as matrizes:

$$\begin{bmatrix} Ea_1 \\ Ea_2 \\ Ea_3 \\ Ea_4 \\ Ea_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ia_1 & Wm_1 \\ Ia_2 & Wm_2 \\ Ia_3 & Wm_3 \\ Ia_4 & Wm_4 \\ Ia_5 & Wm_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Ra \\ Kb \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.3})$$

Para simplicidade de notação, a última equação será escrita como:

$$[Ea] = [IaWm] \begin{bmatrix} Ra \\ Kb \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.4})$$

Normalmente, uma equação matricial como a (A.2.4) seria resolvida pré-multiplicando ambos os lados pela inversa de $[IaWm]$, mas como esta matriz não é quadrada existe a necessidade de primeiro pré-multiplicar ambos os lados de (A.2.4) pela transposta de $[IaWm]$

$$[IaWm]^T [Ea] = [IaWm]^T [IaWm] \begin{bmatrix} Ra \\ Kb \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.5})$$

Agora pode-se pré-multiplicar a equação em ambos os lados pela inversa da matriz quadrada resultante, para obter:

$$\begin{bmatrix} Ra \\ Kb \end{bmatrix} = \left([IaWm]^T [IaWm] \right)^{-1} [IaWm]^T [Ea] \quad (\text{A.2.6})$$

De maneira análoga, na determinação de Tl e Bm tem-se:

$$\begin{bmatrix} Tl \\ Bm \end{bmatrix} = \left([1 \ Wm]^T [1 \ Wm] \right)^{-1} [1 \ Wm]^T [KiIa] \quad (\text{A.2.7})$$

onde:

$$[1 \ Wm] = \begin{bmatrix} 1 & Wm_1 \\ 1 & Wm_2 \\ 1 & Wm_3 \\ 1 & Wm_4 \\ 1 & Wm_5 \end{bmatrix} \quad \therefore \quad [KiIa] = Ki \begin{bmatrix} Ia_1 \\ Ia_2 \\ Ia_3 \\ Ia_4 \\ Ia_5 \end{bmatrix}$$

(A.2.8)

(A.2.9)

Apêndice 3

EQUAÇÕES DO AMPLIFICADOR OPERACIONAL

O amplificador operacional é um componente do sistema que exige algum cuidado para que sua modelagem seja razoavelmente precisa, devido às opções de realimentação disponíveis.

Pode-se partir da realimentação capacitiva para desenvolver equações válidas para os três tipos de realimentação.

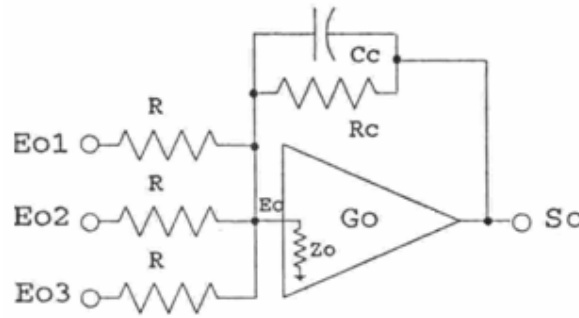


Fig. A.3.1 Amplificador Operacional com Realimentação capacitiva.

Na figura acima, pode-se aplicar a lei das correntes na entrada do Amplificador para obter:

$$\frac{Eo1 - Eo}{R} + \frac{Eo2 - Eo}{R} + \frac{Eo3 - Eo}{R} + \frac{So - Eo}{Rc} + \frac{So - Eo}{\frac{1}{sCc}} = \frac{Eo}{Zo} \quad (A.3.1)$$

Cuja simplificação fornece:

$$-Eo(sCc + \frac{1}{Zo} + \frac{3}{R} + \frac{1}{Rc}) + \frac{1}{R}(Eo1 + Eo2 + Eo3) + So(\frac{1}{Rc} + sCc) = 0 \quad (A.3.2)$$

Se Eo for suficientemente pequeno para que o amplificador esteja na região ativa (o que acontecerá automaticamente devido à realimentação negativa), então:

$$Eo = \frac{1}{Go} So \quad (A.3.3)$$

Substituindo (A.3.3) em (A.3.2) e isolando os termos com $Eo1$, $Eo2$, $Eo3$ e So , tem-se:

$$\frac{1}{R}(Eo1 + Eo2 + Eo3) + So \left\{ \frac{1}{Rc} + sCc - \frac{1}{Go} (sCc + \frac{1}{Zo} + \frac{3}{R} + \frac{1}{Rc}) \right\} = 0 \quad (A.3.4)$$

Definindo S_o como a variável de estado da equação, pode-se isolar sS_o e obter depois de algumas simplificações:

$$sS_o = -\left\{ \frac{1}{R_c C_c} + \frac{1}{R_c C_c (1 - G_o)} \left(\frac{R}{Z_o} + 3 \right) \right\} S_o + \frac{G_o}{R_c C_c (1 - G_o)} (E_{o1} + E_{o2} + E_{o3}) \quad (\text{A.3.5})$$

Esta última equação pode ser usada para fazer a simulação do Amplificador Operacional com realimentação capacitiva. No caso da realimentação resistiva, pode-se fazer C_c igual a zero e R_c igual a R_r na equação (A.3.4), para obter:

$$S_o = -\frac{1}{\frac{R}{R_r} - \frac{1}{G_o} \left(\frac{R}{Z_o} + 3 + \frac{R}{R_r} \right)} (E_{o1} + E_{o2} + E_{o3}) \quad (\text{A.3.6})$$

No caso onde a realimentação externa está em aberto, toma-se o limite com R_r tendendo a infinito, para obter a partir de (A.3.6):

$$S_o = \frac{G_o}{\frac{R}{Z_o} + 3} (E_{o1} + E_{o2} + E_{o3}) \quad (\text{A.3.7})$$

Pode-se observar nas três últimas equações, que os coeficientes de S_o e das entradas são constantes. Nos três casos analisados acima, supõe-se que o amplificador está polarizado na região ativa, o que nem sempre ocorrerá, principalmente quando a malha de realimentação estiver aberta.