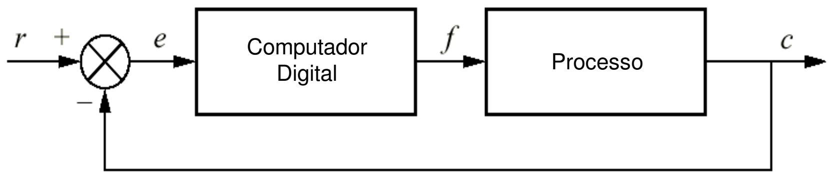
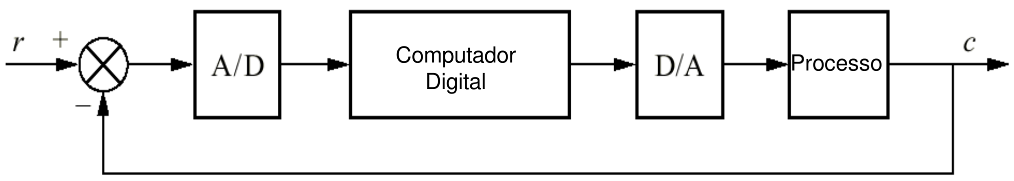
Sistemas Discretos no tempo

Sistema de controle por computador



(a)

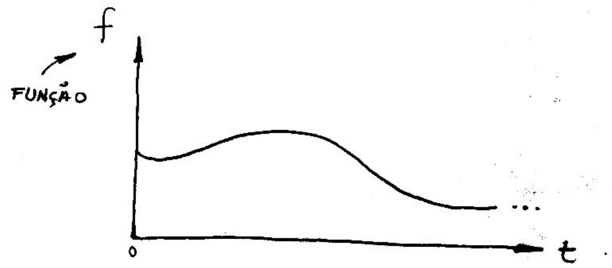


(b)

1 - Introdução

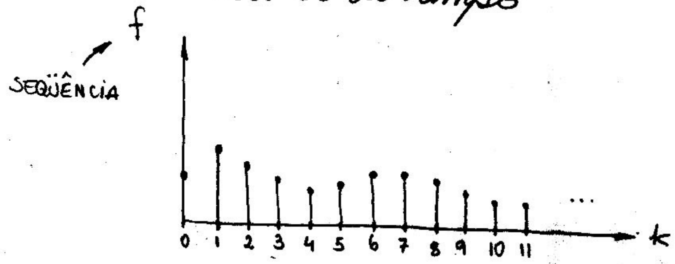
a) Sistemas contínuos no tempo

- Sistemas dinâmicos em que as variáveis podem mudar continuamente (a qualquer instante) no tempo.



b) Sistemas discretos no tempo

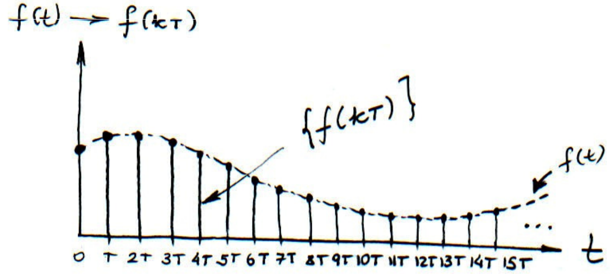
- Sistemas dinâmicos em que uma ou mais variáveis podem mudar apenas em instantes discretos de tempo



CASO ESPECIAL :

Sistemas a dados amostrados

Sinal contínuo (função $f(t)$) $\xrightarrow[\text{NO TEMPO}]{\text{DISCRETIZAÇÃO}}$ sinal discreto (seqüência $f(kT)$)

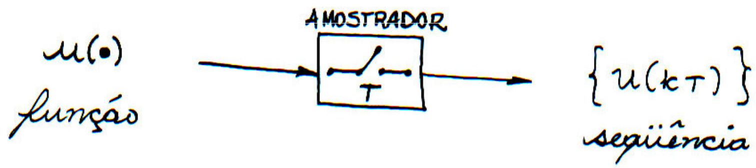


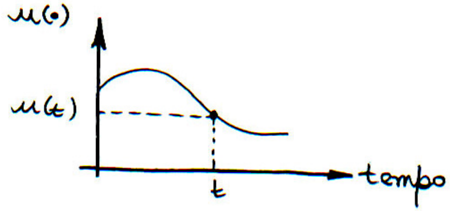
$k = 0, 1, 2, \cdots$

2 - AMOSTRAGEM E DIGITALIZAÇÃO

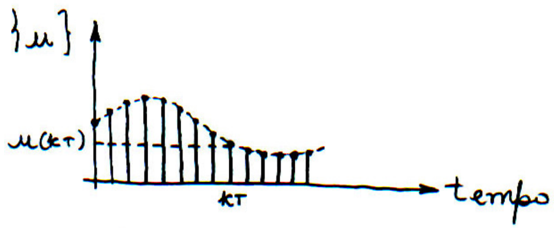
a) Amostragem

- Transformação de um sinal contínuo (no tempo) em um sinal discreto (no tempo)





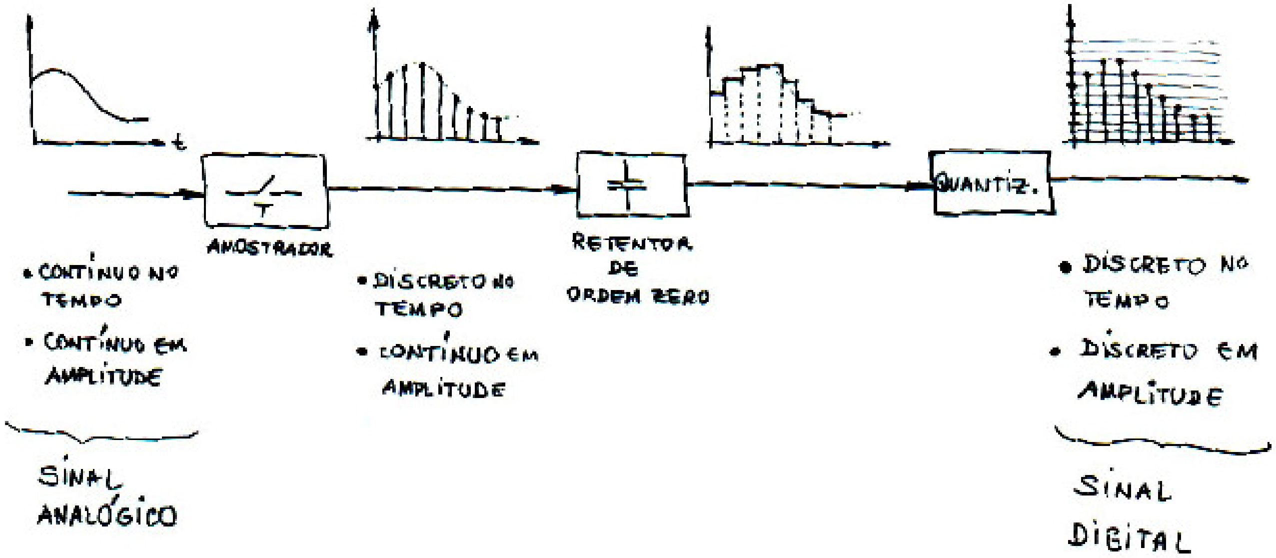
- CONTÍNUO NO TEMPO
- CONTÍNUO EM AMPLITUDE



- DISCRETO NO TEMPO
- CONTÍNUO EM AMPLITUDE

b) Digitalização

= (Amostragem + retenção + quantização) → CONVERSÃO A/D
(DESCRIÇÃO FUNCIONAL E NÃO ESTRUTURAL)



3 - NATUREZA DOS SISTEMAS DISCRETOS

a. Sistemas com amostragem inerente (discretos por natureza)

- Devido à operação sequencial

Ex: Algoritmos computacionais

- Devido à medição

Ex: Intrumentos para meteorologia, radar.

- Devido à operação

Ex: Motores de combustão interna, circuitos com tiristores.

b. Sistemas com amostragem intencional

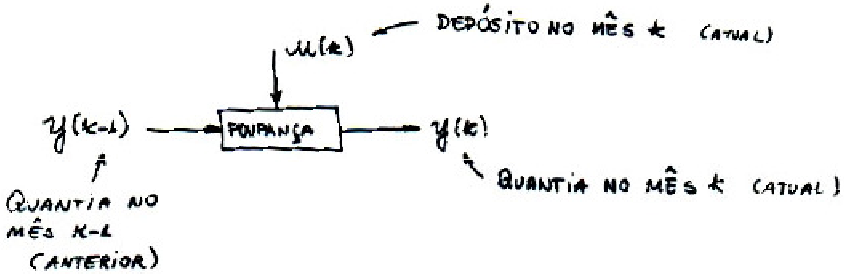
- Devido à conveniência : Simulação digital
- Devido à interconexão de sistemas contínuos e discretos : Controle de processos físicos por computador

4- Exemplos de sistemas discretos

(Modelos matemáticos)

a) Poupança (processo econômico) (Amostragem inerente) (intrinsecamente discreto)

q = taxa de juros (%) (constante)



$$y(k) = \left(1 + \frac{q}{100}\right) y(k-1) + u(k)$$

y → variável de saída
u → variável de entrada

$$\boxed{y(k) - \left(1 + \frac{q}{100}\right) y(k-1) = u(k)}$$

$$y(k) + a_1 y(k-1) = b_0 u(k) \qquad \begin{cases} a_1 = -\left(1 + \frac{q}{100}\right) \\ b_0 = 1 \end{cases}$$

Eq. discreta

b) ALGORITMO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA (Amostragem intencional)

$$\frac{dy(t)}{dt} = u(t) \qquad y(0) = 0 \qquad u(t) = 0 \text{ p/ } t < 0$$

$$\Downarrow$$

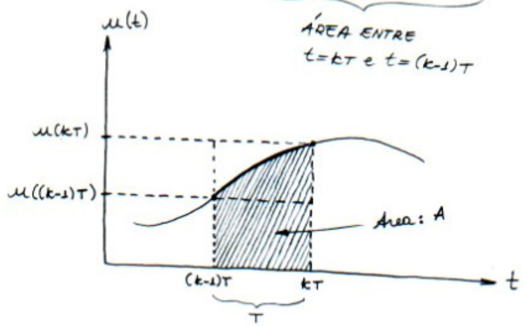
$$y(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau$$

(discretizando com período de amostragem T constante $\rightarrow t = kT$) $(k = 0, 1, 2, \ldots)$

$t = kT$

$$y(kT) = \int_0^{kT} u(\tau)\,d\tau = \underbrace{\int_0^{(k-1)T} u(\tau)\,d\tau}_{y((k-1)T)} + \int_{(k-1)T}^{kT} u(\tau)\,d\tau$$

$$y(kT) = y((k-1)T) + \underbrace{\int_{(k-1)T}^{kT} u(\tau)\,d\tau}_{\text{ÁREA ENTRE } t = kT \text{ e } t = (k-1)T}$$



Como obter um valor aproximado de A a partir de T, $u(kT)$ e $u((k-1)T)$?

1ª Aproximação : Aproximação retangular progressiva

$$A \cong T \cdot u((k-1)T)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(kT) - y((k-1)T) = T\,u((k-1)T)}$$

2ª Aproximação : Aproximação retangular regressiva

$$A \cong T \cdot u(kT)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(kT) - y((k-1)T) = T\,u(kT)}$$

3ª Aproximação : Aproximação trapezoidal

$$A \cong T \cdot \frac{u(kT) + u((k-1)T)}{2}$$

EQUAÇÃO DISCRETA

$$\Rightarrow \boxed{y(kT) - y((k-1)T) = \frac{T}{2}u(kT) + \frac{T}{2}u((k-1)T)}$$

$$y(kT) + a_1 y((k-1)T) = b_0 u(kT) + b_1 u((k-1)T) \qquad \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_0 = T/2 \\ b_1 = T/2 \end{cases}$$

5- EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS (de ordem n)

Para um sistema contínuo (equação diferencial)

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_n y(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u(t)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

(7)

Forma geral de uma "equação de diferenças" de ordem n

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) =$$
$$= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_m u(k-m)$$

OBS :

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1)$$

Definindo :

$\Delta \rightarrow$ operador diferença

$$\begin{cases} \Delta y(k) \triangleq y(k) - y(k-1) \rightarrow \text{diferença de 1ª ordem} \\ \Delta^2 y(k) \triangleq \Delta(\Delta y(k)) = \Delta y(k) - \Delta y(k-1) = \\ \qquad = y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) \rightarrow \text{diferença de 2ª ordem} \\ \Delta u(k) = u(k) - u(k-1) \end{cases}$$

$$y(k-1) = y(k) - \Delta y(k)$$

$$y(k-2) = \Delta^2 y(k) - y(k) + 2y(k) - 2\Delta y(k) = \Delta^2 y(k) + y(k) - 2\Delta y(k)$$

$$u(k-1) = u(k) - \Delta u(k)$$

$$\rightarrow y(k) + a_1 y(k) \boxed{- a_1 \Delta y(k)} + a_2 \Delta^2 y(k) + a_2 y(k) \boxed{- 2a_2 \Delta y(k)}$$

$$= b_0 u(k) + b_1 u(k) - b_1 \Delta u(k)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 \Delta^2 y(k) - (a_1 + 2a_2)\Delta y(k) + (1 + a_1 + a_2) y(k) = -b_1 \Delta u(k) + (b_0 + b_1) u(k)}$$

Equação de diferenças propriamente dita

- EQ'S DE DIFERENÇAS PODEM SER RESOLVIDAS POR RECORRÊNCIA:

Ex: $y(k) = -a_1 y(k-1) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1)$

$$y(0) = -a_1 y(-1) + b_0 u(0) + b_1 u(-1)$$
$$y(1) = -a_1 y(0) + b_0 u(1) + b_1 u(0)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

6 - Propriedades dos sistemas discretos :

a) Linearidade :

Com

$$\{u_a(k)\} \Longrightarrow \{y_a(k)\}$$

$$\{u_b(k)\} \Longrightarrow \{y_b(k)\}$$

Se para α e β reais — Superposição

$$\{\alpha u_a(k) + \beta u_b(k)\} \Longrightarrow \{\alpha y_a(k) + \beta y_b(k)\} \Longleftrightarrow \text{SISTEMA LINEAR}$$

b) Invariância no tempo :

Com

$$\{u(k)\} \Longrightarrow \{y(k)\}$$

$$\{u(k-\tau)\} \Longrightarrow \{y(k-\tau)\} \Longleftrightarrow \text{SISTEMA INVARIANTE NO TEMPO}$$

$$\forall\, k, \tau \text{ e } u(k)$$

6 - Propriedades dos sistemas discretos :

a) Linearidade :

Com

$$\{u_a(k)\} \Longrightarrow \{y_a(k)\}$$

$$\{u_b(k)\} \Longrightarrow \{y_b(k)\}$$

Se para α e β reais — Superposição

$$\{\alpha u_a(k) + \beta u_b(k)\} \Longrightarrow \{\alpha y_a(k) + \beta y_b(k)\} \Longleftrightarrow \text{SISTEMA LINEAR}$$

b) Invariância no tempo :

Com

$$\{u(k)\} \Longrightarrow \{y(k)\}$$

$$\{u(k-\tau)\} \Longrightarrow \{y(k-\tau)\} \Longleftrightarrow \text{SISTEMA INVARIANTE NO TEMPO}$$

$$\forall\, k, \tau \text{ e } u(k)$$

c) Causalidade

→ A saída em um dado instante depende apenas da entrada naquele instante e em instantes passados.

→ TODO SISTEMA FÍSICO É CAUSAL

$$y(k) + \dots + a_n y(k-n) = b_0 u(k) + \dots + b_m u(k-m)$$

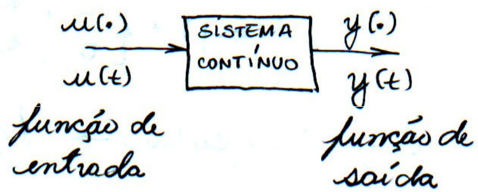
← CAUSALIDADE

II - REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS LINEARES DISCRETOS

1 - REPRESENTAÇÃO MATEMÁTICA NO DOMÍNIO t

1.1 - INTRODUÇÃO

a) Sistema contínuo (REVISÃO: domínio t)



• Função delta de Dirac (IMPULSO) → $\delta(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\,dt = \int_{\tau-\epsilon}^{\tau+\epsilon} \delta(t-\tau)\,dt = 1 \qquad \epsilon > 0 \ \text{(MUITO PEQUENO)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-\tau)\,dt = f(\tau)$$

- Função de ponderação, $g(t) \rightarrow$ resposta ao impulso

$$u(t) = \delta(t) \longrightarrow y(t) = g(t)$$

$$\overset{u(t)}{\longrightarrow} \boxed{g(t)} \longrightarrow y(t) \qquad\qquad y(t) = u(t) * g(t)$$

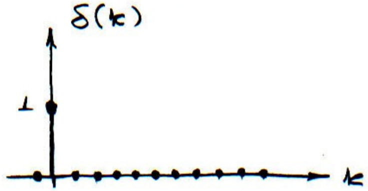
b) Sistema discreto

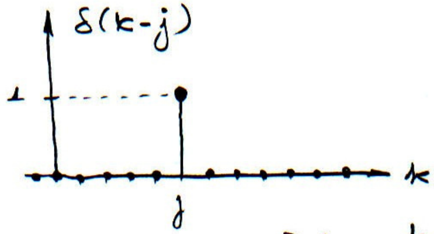
$$\{u(k)\} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{SISTEMA}\\ \text{DISCRETO}\end{array}} \longrightarrow \{y(k)\}$$

seq. de entrada

seq. de saída

- Seqüência delta de Kronecker (PULSO) $\longrightarrow \{\delta(k)\}$





$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & , \ k=0 \\ 0 & , \ k \neq 0 \end{cases} \qquad \delta(k-j) = \begin{cases} 1 & , \ k=j \\ 0 & , \ k \neq j \end{cases}$$

- Seqüência de ponderação (resposta ao pulso) $\longrightarrow \{g(k)\}$

$$\{u(k)\} = \{\delta(k)\} \Longrightarrow \{y(k)\} = \{g(k)\}$$

$$\{u(k)\} \longrightarrow \boxed{\{g(k)\}} \longrightarrow y(k)$$

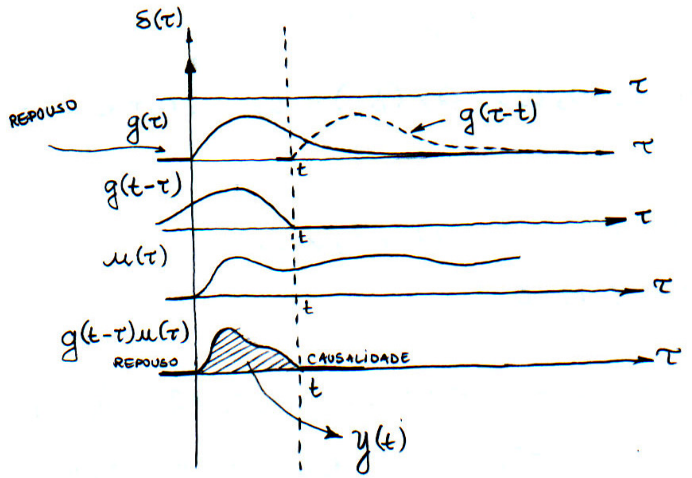
1.2 – Resposta do sistema discreto – Somatório de convolução

a) Sistema contínuo

$$u(t) \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow y(t)$$

Convolução entre excitação e função de ponderação

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$



Representação gráfica

b) Sistemas discretos

$$\{u(k)\} \longrightarrow \boxed{\{g(k)\}} \longrightarrow \{y(k)\}$$

ENTRADA ➞ SAÍDA

① $\{\delta(k)\} \longrightarrow \{g(k)\}$

$\downarrow$ PELA INVARIÂNCIA NO TEMPO

$\{\delta(k-j)\} \longrightarrow \{g(k-j)\}$

② Seja a amostra $u(0)$ de $\{u(k)\}$

<u>PELA LINEARIDADE</u>:

$$u(0)\{\delta(k)\} \rightarrow u(0)\{g(k)\}$$

$\downarrow$ De forma semelhante, para a amostra j de $\{u(k)\}$

$$u(j)\{\delta(k-j)\} \rightarrow u(j)\{g(k-j)\}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{\sum_{j=-\infty}^{\infty} u(j)\{\delta(k-j)\}}_{\{u(k)\}} \rightarrow \underbrace{\sum_{j=-\infty}^{\infty} \{g(k-j)\}u(j)}_{\{y(k)\}}$$

LINEARIDADE

Para a k-ésima amostra da seqüência de saída

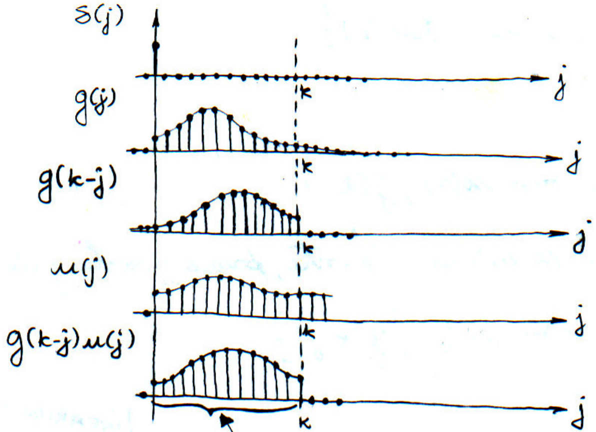
$$\boxed{y(k) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g(k-j)\,u(j)}$$

SOMATÓRIO DE CONVOLUÇÃO

$$y(k) = \underbrace{\cancel{\sum_{j=-\infty}^{-1} g(k-j)u(j)}}_{0\ \hookrightarrow\ \text{REPOUSO}} + \sum_{j=0}^{k} g(k-j)u(j) + \underbrace{\cancel{\sum_{j=k+1}^{\infty} g(k-j)u(j)}}_{0\ \hookrightarrow\ \text{CAUSALIDADE}}$$

$u(j) \rightarrow$ entrada aplicada no instante j

$g(k-j) \rightarrow$ resposta medida em k, devido ao pulso aplicado em j.



Soma das amostras = amostra da seq. de saída no instante k

3. Representação Matemática de sistemas discretos no domínio z.

3.1. Transformada de Laplace (revisão)

$$u(t) \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow y(t) \qquad u(t) = e^{st}$$

$s \in \mathbb{C}$

t real

$$y(t) = u(t) * g(t) = e^{st} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-s\tau} d\tau = e^{st} G(s)$$

Igual à excitação

Função de transferência

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

domínio t: → domínio s:

Eq. diferencial → eq. algébrica

Integral de convolução → produto

$y(t) = g(t) * u(t)$ $\quad (Y(s) = G(s) . U(s))$

3.2. TRANSFORMADA $\mathcal{Z}$:

3.2.1. INTRODUÇÃO

$$\{u(k)\} \longrightarrow \boxed{\{g(k)\}} \longrightarrow \{y(k)\}$$

$$u(k) = z^k \qquad k \geq 0 \qquad (z \in \mathbb{C})$$

$$y(k) = \sum_{j=0}^{k} g(k-j)\,u(j) = \sum_{j=0}^{k} g(k-j)\,z^{j} \qquad (k-j) = \ell$$

$$y(k) = \sum_{\ell=0}^{k} g(\ell)\,z^{k-\ell} \implies y(k) = z^k \cdot \underbrace{\sum_{\ell=0}^{k} g(\ell)\,z^{-\ell}}_{G(z)}$$

$$y(k) = z^k\,G(z)$$

3.2.2. DEFINIÇÃO (BILATERAL)

Função da variável complexa z

Sequência

$$\{f(k)\} \xrightarrow{\text{TRANSFORMAÇÃO } \mathcal{Z}} F(z) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\, z^{-k} \qquad (r_0 < |z| < R_0)$$

TRANSFORMADA BILATERAL

$$F(z) = \mathcal{Z}(\{f(k)\})$$

Isto em uma determinada região de convergência no plano z.

3.2.3. Propriedades da transformada $\mathcal{Z}$.

(Assume-se que as seq. têm amostras nulos para $k<0$) → (transformada unilateral)

A) Linearidade

Seja $F_1(z)=\mathcal{Z}\{f_1(k)\}$ e $F_2(z)=\mathcal{Z}\{f_2(z)\}$

e α e β reais

$$\mathcal{Z}\{\alpha f_1(k)+\beta f_2(k)\} = \alpha F_1(z) + \beta F_2(z)$$

- Demonstração:

$$\mathcal{Z}\{\alpha f_1(k)+\beta f_2(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\alpha f_1(k)+\beta f_2(k)\right) z^{-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha f_1(k) z^{-k} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta f_2(k) z^{-k}$$

$$= \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} f_2(k) z^{-k} = \alpha \mathcal{Z}\{f_1(k)\} + \beta \mathcal{Z}\{f_2(k)\}$$

$$= \alpha F_1(z) + \beta F_2(z)$$

B) DESLOCAMENTO

* AVANÇO: $\mathcal{Z}\{f(k+j)\} = z^j F(z) - \sum_{\ell=0}^{j-1} f(\ell) z^{j-\ell} \qquad (j>0)$

- DEMONSTRAÇÃO: $F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$

$$\mathcal{Z}\{f(k+j)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k+j) z^{-k} \qquad (k+j=\ell)$$

$$= \sum_{\ell=j}^{\infty} f(\ell) z^{-\ell+j} = z^j \left[\sum_{\ell=j}^{\infty} f(\ell) z^{-\ell} \right]$$

$$= z^j \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell) z^{-\ell} - \sum_{\ell=0}^{j-1} f(\ell) z^{-\ell} \right]$$

$$\mathcal{Z}\{f(k+j)\} = z^{j}\sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell)z^{-\ell} - \sum_{\ell=0}^{j-1} f(\ell)z^{j-\ell}$$

$$\mathcal{Z}\{f(k+j)\} = z^{j}F(z) - \sum_{\ell=0}^{j-1} f(\ell)z^{j-\ell}$$

* ATRASO : $\mathcal{Z}\{f(k-j)\} = z^{-j}F(z)$ $(j>0)$

- DEMONSTRAÇÃO : $F(z) = \mathcal{Z}\{f(k)\}$

$$\mathcal{Z}\{f(k-j)\} = \sum_{k=0}^{\infty} f(k-j)z^{-k} \qquad (\ell = k-j)$$

$$= \sum_{\ell=-j}^{\infty} f(\ell)z^{-\ell-j} = z^{-j}\left[\sum_{\ell=-j}^{\infty} f(\ell)z^{-\ell}\right]$$

$$= z^{-j}\left[\underbrace{\sum_{\ell=-j}^{-1} f(\ell)z^{-\ell}}_{0} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{\infty} f(\ell)z^{-\ell}}_{F(z)}\right]$$

$$\mathcal{Z}\{f(k-j)\} = z^{-j}F(z)$$

OBS. APLICAÇÃO DA PROPRIEDADE $\Longrightarrow$ FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA

$$\{u(k)\} \longrightarrow \boxed{\{g(k)\}} \longrightarrow \{y(k)\}$$

- Equação de diferenças

$$y(k) + a_1 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n) =$$
$$b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_m u(k-m)$$

$Y(z) = \mathcal{Z}\{y(k)\}$ e $U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\}$

Aplicando a transformada Z em ambos os membros da equação de diferenças e pela propriedade da linearidade:

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} + a_1 \overset{\mathcal{Z}}{\{y(k-1)\}} + \cdots + a_n \overset{\mathcal{Z}}{\{y(k-n)\}} =$$

$$b_0 \mathcal{Z}\{u(k)\} + b_1 \underset{\mathcal{Z}}{\{u(k-1)\}} + \cdots + b_m \underset{\mathcal{Z}}{\{u(k-m)\}}$$

$$\Rightarrow \quad Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \cdots + b_m z^{-m} U(z)$$

$$Y(z)\left[1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}\right] = U(z)\left[b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}\right]$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n} \; z^{n-m}$$

FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DISCRETA, $G(z)$

c) TRANSFORMADA DO SOMATÓRIO DE CONVOLUÇÃO

$$y(k) = \sum_{j=0}^{\infty} g(k-j)\,u(j) \iff Y(z) = G(z).U(z)$$ (incluindo o caso não causal)

Demonstração :

$$y(k) = g(k)u(0) + g(k-1)u(1) + g(k-2)u(2) + \dots$$

$$\mathcal{Z}\{y(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} y(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left[g(k)u(0) + g(k-1)u(1) + g(k-2)u(2) + \dots \right] z^{-k}$$

$$Y(z) = u(0)\sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k} + u(1)\sum_{k=0}^{\infty} g(k-1) z^{-k} + u(2)\sum_{k=0}^{\infty} g(k-2) z^{-k} + \dots$$

$$= u(0)\,G(z) + u(1)\,z^{-1}G(z) + u(2)\,z^{-2}G(z) + \dots$$

$$= G(z)\left[u(0) + u(1)z^{-1} + u(2)z^{-2} + \dots \right] = G(z) \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k}}_{U(z)}$$

$$Y(z) = G(z).U(z)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = G(z) = \mathcal{Z}\{g(kT)\} \Rightarrow$$ FUNÇÃO DE TRANSFERÊNCIA DISCRETA.

DE FORMA GERAL: $\mathcal{Z}\{f_1(k) * f_2(k)\} = F_1(z).F_2(z)$