5- EQUAÇÃO DE DIFERENÇAS (de ordem n)

Para um sistema contínuo (equação diferencial)

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y(t)}{dt^{n-2}} + \dots + a_n y(t) =$$

$$= b_0 \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_m u(t)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + a_2 s^{n-2} + \dots + a_n}$$

7

Forma geral de uma "equação de diferenças" de ordem n

$$\boxed{\begin{aligned} &y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) = \\ &= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) + \dots + b_m u(k-m) \end{aligned}}$$

OBS :

$$y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1)$$

Definindo :

$\Delta \to$ operador diferença

$$\begin{cases} \Delta y(k) \triangleq y(k) - y(k-1) \to \text{diferença de 1ª ordem} \\ \Delta^2 y(k) \triangleq \Delta(\Delta y(k)) = \Delta y(k) - \Delta y(k-1) = \\ \qquad = y(k) - 2y(k-1) + y(k-2) \to \text{diferença de 2ª ordem} \\ \Delta u(k) = u(k) - u(k-1) \end{cases}$$

$$y(k-1) = y(k) - \Delta y(k)$$

$$y(k-2) = \Delta^2 y(k) - y(k) + 2y(k) - 2\Delta y(k) = \Delta^2 y(k) + y(k) - 2\Delta y(k)$$

$$u(k-1) = u(k) - \Delta u(k)$$

$$\to y(k) + a_1 y(k) \boxed{- a_1 \Delta y(k)} + a_2 \Delta^2 y(k) + a_2 y(k) \boxed{- 2a_2 \Delta y(k)}$$

$$= b_0 u(k) + b_1 u(k) - b_1 \Delta u(k)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_2 \Delta^2 y(k) - (a_1 + 2a_2)\Delta y(k) + (1 + a_1 + a_2) y(k) = -b_1 \Delta u(k) + (b_0 + b_1) u(k)}$$

Equação de diferenças propriamente dita

- EQ'S DE DIFERENÇAS PODEM SER RESOLVIDAS POR RECORRÊNCIA :

Ex : $y(k) = -a_1 y(k-1) + b_0 u(k) + b_1 u(k-1)$

$$y(0) = -a_1 y(-1) + b_0 u(0) + b_1 u(-1)$$
$$y(1) = -a_1 y(0) + b_0 u(1) + b_1 u(0)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

6 - Propriedades dos sistemas discretos :

a) Linearidade :

Com

$$\{u_a(k)\} \Longrightarrow \{y_a(k)\}$$
$$\{u_b(k)\} \Longrightarrow \{y_b(k)\}$$

Se para α e β reais

Superposição

$$\{\alpha u_a(k) + \beta u_b(k)\} \Longrightarrow \{\alpha y_a(k) + \beta y_b(k)\} \iff \text{SISTEMA LINEAR}$$

b) Invariância no tempo :

Com

$$\{u(k)\} \Longrightarrow \{y(k)\}$$
$$\{u(k-\tau)\} \Longrightarrow \{y(k-\tau)\} \iff \text{SISTEMA INVARIANTE NO TEMPO}$$
$$\forall\ k, \tau \text{ e } u(k)$$